Série A, n° 2374
N° d'ordre :
3246

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

ROGER NATAF
AGRÉGÉ DES SCIENCES PHYSIQUES

1re THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES TRANSITIONS β INTERDITES

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 14 février 1951 devant la Commission d'examen

M. L. de BROGLIE.. *Président.*
Mme JOLIOT-CURIE.. } *Examinateurs.*
M. F. PERRIN..... }

PARIS
POLYCOPIE CENTRE RACINE
13, Rue Racine

SÉRIE A, N° 2374
N° D'ORDRE :
3246

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

ROGER NATAF
AGRÉGÉ DES SCIENCES PHYSIQUES

1re THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES TRANSITIONS β INTERDITES

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 14 février 1951 devant la Commission d'examen

M. L. de BROGLIE.. *Président.*
Mme JOLIOT-CURIE.. } *Examinateurs.*
M. F. PERRIN..... }

PARIS
POLYCOPIE CENTRE RACINE
13, Rue Racine

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

Doyen .....M.A. Chatelet.

PROFESSEURS

G. JULIA .....T Analyse supérieure et Algèbre supérieure.

A. DENJOY .....T Théorie des Fonctions

L. LUTAUD.....T Géographie physique et Géologie dynamique.

E. DARMOIS .....T Enseignement de Physique.

Robert LEVY .....T Physiologie comparée.

Henri VILLAT .....T Mécanique des fluides et applications.

Mme RAMART-LUCAS T Chimie organique.

FOCH ..... T Mécanique physique et expérimentale.

PAUTHENIER ..... T Electrotechnique générale.

DE BROGLIE ..... T Théories physiques.

JOB ..... T Chimie générale.

PRENANT ..... T Anatomie et Histologie comparées.

COMBES ..... T Physiologie végétale.

GARNIER ..... T Géométrie supérieure.

PERES ..... T Mécanique rationnelle.

HACKSPILL ..... T Chimie Minérale.

LAUGIER ..... T Physiologie générale.

TOUSSAINT ..... T Technique Aéronautique.

M. CURIE ..... T Physique (P.C.B.).

G. RIBAUD ..... T Hautes Températures.

CHAZY ..... T Mécanique analytique et Mécanique céleste.

CROZE ..... T Physique théorique et physique céleste.

DUPONT ..... T Théories chimiques.

VALIRON ..... T Calcul différentiel et Calcul intégral.

BARRABE ..... T Géologie structurale et géologie appliquée.

..

VAVON ..... T Analyse et mesures chimiques.

G. DARMOIS ..... T Calcul des probabilités et Physique Mathématique.

Jacques BOURCART T Géographie physique et Géologie dynamique.

AUBEL ..... T Chimie Biologique.

Mme JOLIOT-CURIE T Physique générale et Radioactivité.

PLANTEFOL ..... T Botanique.

CABANNES ..... T Recherches physiques.

GRASSE ..... T Evolution des êtres organisés.

PREVOST ..... T Chimie organique.

BOULIGAND ..... T Application de l'analyse à la Géométrie.

CHAUDRON ..... T Chimie appliquée.

WYART ..... T Minéralogie.

TEISSIER ..... T Zoologie.

MANGENOT ..... T Biologie végétale.

P. AUGER ..... T Physique quantique et relativité.

MONNIER ..... T Physiologie Générale.

PIVETEAU ..... T Géologie.

ROCARD ..... T Physique.

H. CARTAN ..... T Mathématiques générales.

SCHAEFFER ..... T Physiologie des fonctions.

LAFFITTE ..... T Chimie (P.C.B.).

FAVARD ..... Calcul des probabilités et Physiques-Mathématique

COULOMB ..... T Physique du Globe.

Mlle COUSIN ..... T Biologie animale (P.C.B.).

CHRETIEN ..... Chimie générale.

P. DRACH ..... Zoologie.

KASTLER ..... Physique.

CHATELET ..... T Arithmétique et théorie des nombres.

EPHRUSSI ..... T Génétique.

WURMSER ..... T Biologie physico-chimique.

BAUER ..... T Chimie-Physique.

RIVIERE ..... Géologie (P.C.B.).

GAUTHERET ..... Biologie végétale (P.C.B.).

LUCAS ..... Physique.

A. THOMAS ..... Evolution des êtres organisés.

ARNULF ..... Optique appliquée.

Max MORAND ..... Physique.

SOLEILLET ..... Physique.

FORTIER ..... T Mécanique expérimentale des fluides.

DANJON ..... T Astronomie.

FROMAGEOT ..... T Chimie Biologique.

LAPORTE ..... T Physique générale et Radioactivité.

JANET ..... Mathématiques générales.

PETIT ..... T Biologie maritime.

QUENEY ..... T Météorologie et dynamique atmosphérique.

GALLIEN ..... Biologie animale (P.C.B.).

EICHHORN ..... Biologie végétale (P.C.B.).

de CUGNAC ..... Biologie végétale (P.C.B.).

LAVAL ..... Physique (P.C.B.).

Mlle GAUCHOIS .. Chimie-Physique.

THELLIER ..... Physique du Globe.

AUDUBERT ..... Electrochimie.

L'HERITIER ..... Génétique.

GRIVET ..... T Radio Electricité.

PONCIN ..... Mécanique des fluides.

THIRY ..... T Mécanique appliquée.

DUBREIL ..... Mathématiques générales.

QUELET ..... Chimie (P.C.B.).

GAGNIARD ..... Géophysique appliquée.

CHAMPETIER ..... Chimie appliquée.

CUVILLIER ..... Géologie structurale et Géologie appliquée.

JUNG ..... Pétrographie.

TRILLAT ..... Physique (P.C.B.).

WIEMANN ..... Chimie (P.C.B.).

LICHNEROWIEZ .... Mathématiques.

JACQUINOT ..... Physique (P.C.B.).

VASSY ..... Physique de l'Atmosphère.

DESTOUCHES ..... Théories - Physiques

PRUVOST ..... T Géologie.

Secrétaire .....Ch. MONIER.

A la Mémoire

de

Mon Oncle, Alfred VALENSI

Mon Maître à l'Ecole Normale, Georges BRUHAT

Mon Ami, Pierre JUIN

Morts en Déportation.

A mes Parents,

Témoignage de reconnaissance
et de profonde affection.

- AVANT-PROPOS -

La théorie de la radioactivité β semble actuellement fixée dans ses grandes lignes.

On admet à présent une intéraction directe entre nucléons et champ leptonique (associé à l'électron et au neutrino) sans champ mésonique intermédiaire. Des considérations générales d'invariance Relativiste conduisent alors à cinq formes possibles d'intéraction, c'est-à-dire à une combinaison linéaire arbitraire de cinq formes.

L'existence de transitions permises, avec une variation de moment angulaire ΔJ égale à I, conduit à préciser un peu le choix de l'intéraction, qui doit donner les règles de sélection de GAMOW-TELLER (transitions permises pour $\Delta J = 0$ de 1).

Nous montrons que, si l'on ne fait aucune hypothèse particulière sur les couplages spin-orbite dans les noyaux, il y a deux types de transitions interdites d'ordre n.

Un type où $\Delta J = n + 1$ et où la forme du spectre et la période ne dépendent pas de l'intéraction choisie.

Un type où $\Delta J = n$ et où forme du spectre et période dépendent fortement de la combinaison choisie pour l'interaction.

Nos calculs, utilisant la méthode des harmoniques sphériques de MARSHAK, s'accordent sensiblement avec ceux de GREULING utilisant la méthode tensorielle.

L'étude expérimentale des transitions du 2è type doit permettre de préciser complètement l'intéraction.

En outre, si l'on admet un couplage RUSSEL-SAUNDERS dans le noyau, il existe des transitions interdites d'ordre n avec $\Delta J \leqslant n-1$.

C'est une transition de ce type que R. BOUCHEZ a suggéré pour expliquer la transition $^{14}C \longrightarrow {}^{14}N + e^-$.

La discussion des différentes hypothèses pouvant expliquer la très longue période de cette transition montre que cette hypothèse, si elle conduit à des difficultés, est cependant la plus plausible. En effet, une autre, avancée par différents auteurs, conduirait à rejeter, dans ce cas, les règles empiriques sur la parité des noyaux, donc aussi le modèle quasi-atomique, qui, en général, permettent de déterminer correctement moment angulaire et parité.

Voici le plan suivi pour notre travail :

I - FORMALISME GENERAL

11- Fonctions d'onde des leptons,
12- Représentation du noyau,
13- Couplage nucléons-leptons,

2 - CLASSIFICATION DES TRANSITIONS INTERDITES AVEC L'INTERACTION TENSORIELLE :

21- Cas du couplage RUSSEL-SAUNDERS et cas général,
22- Cas d'un modèle nucléaire à états individuels,

3 - CLASSIFICATION AVEC LeS AUTRES FORMES D'INTERACTION

4 - CALCUL DES PROBABILITES DE TRANSITION AVEC L'INTERACTION TENSORIELLE

41- Transitions permises,
42- Transitions interdites d'ordre n avec $\Delta J = n + 1$,
43- " " " n " $\Delta J = n$
44- " " " n " $\Delta J = n - 1$

5 - CALCUL DES PROBABILITES DE TRANSITION AVEC L'INTERACTION "VECTEUR AXIAL"

6 - COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

61- Classification des transitions d'après les données expérimentale
62- Etudes de quelques transitions

APPENDICE I - ROTATIONS INFINITESIMALES ET MOMENTS ANGULAIRES. FORMULES DU GROUPE DES ROTATIONS DE CLEBSCH-GORDAN

APPENDICE II- I- Calcul des facteurs radiaux leptoniques,
2- Réduction du produit de deux harmoniques sphériques,
3- Indication sur le théorème (M) de DE GROOT et TOLHOEK,

APPENDICE III- Les éléments de matrice nucléaires dans le modèle à états individuels

Je remercie vivement Monsieur JOLIOT qui m'a proposé ce sujet de travail, en relation avec les nombreux travaux expérimentaux sur la radioactivité β , effectués sous sa direction au laboratoire de chimie nucléaire du Collège de France.

J'assure également de ma reconnaissance Monsieur F. PERRIN, dont le cours au Collège de France m'a été très utile, ainsi que les conseils qu'il m'a donnés au début de ce travail.

Je remercie Monsieur PROCA de m'avoir accueilli aux séminaires qu'il dirige.

Enfin j'ai été très heureux de pouvoir profiter de la présence à Paris de Monsieur WEISSKOPF, qui a eu l'amabilité de me communiquer son cours avant sa parution; j'y ai trouvé mentionnés les résultats de travaux récents, non encore publiés, ce qui m'a conduit à remanier la dernière partie de mon travail. (comparaison avec l'expérience).

Je remercie encore Robert BOUCHEZ, assistant à l'Institut du Radium, S.R. de GROOT, professeur à Utrecht, et son assistant H.A. TOLHOEK avec qui j'ai collaboré pour des articles concernant la radioactivité β et avec qui j'ai eu de fructueuses discussions.

Je suis heureux de profiter de l'occasion qui m'est offerte d'exprimer combien l'atmosphère de franche camaraderie du laboratoire m'a été précieuse, et d'assurer tous les travailleurs et le personnel de ma sympathie.

Je remercie enfin ma femme qui m'a aidé pour la mise en page et la correction des épreuves ainsi que les secrétaires du Centre Racine qui ont assuré avec dévouement la dactylographie et la polycopie de ce travail.

R.N.

Paris, le 27 Décembre 1950.

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	I
I- FORMALISME GENERAL	
II- Fonctions d'onde des leptons	2
I2- Représentation du noyau	8
I3- Le couplage nucléons-leptons.....	20
II- CLASSIFICATION DES TRANSITIONS INTERDITES AVEC L'INTERACTION TENSORIELLE	
2I- Cas du couplage RUSSEL-SAUNDERS (R.S.) et cas général	27
22- Cas d'un modèle nucléaire à états individuels.....	49
III- CLASSIFICATION AVEC LES AUTRES FORMES D'INTERACTION	60
IV- CALCUL DES PROBABILITES DE TRANSITION AVEC L'INTERACTION TENSORIELLE	
4I- Transitions permises	64
42- Transitions interdites d'ordre n avec $\Delta J=n+1$.....	70
43- Transitions interdites d'ordre n avec $\Delta J=n$ 1.....	77
44- Transitions interdites d'ordre n avec $\Delta J=n-1$.....	84
V- CALCUL DES PROBABILITES DE TRANSITION AVEC L'INTERACTION "VECTEUR AXIAL"	9I
VI- COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE	
6I- Classification des transitions d'après les données expérimentales	94
62- Etude de quelques transitions	
62I- $^{107}Cd \longrightarrow {}^{107}Ag + e^+ (K)$	I02
622- $^{10}Be \longrightarrow {}^{10}B + e^-$	I06
623- $^{14}C \longrightarrow {}^{14}N + e^-$	I07
$^{32}P \longrightarrow {}^{32}S + e^-$	III
624- Conclusion avec : $^{36}Cl \longrightarrow {}^{36}A + e^-$	115
APPENDICE I - Rotations infinitésimales et moments angulaires Formules du Groupe des rotations de Clebsch-Gordan.....	117
APPENDICE II- I-Calcul des facteurs radiaux leptoniques..	125
2-Réduction du produit de deux harmoniques sphériques	131
3-Indication sur le théorème (M.) de De Groot et Tolhoek.....	133

...

TABLE DES MATIERES

(Suite)

APPENDICE III- Les éléments de matrice nucléaires dans le modèle à états individuels I35

N.B.- La partie 22 (p.49) apporte seulement une vérification des résultats qui précèdent.

- Les formules utilisées dans la dernière partie 6 (comparaison avec l'expérience) sont résumées p.89 et 90 (+)

- Les courbes de formes de spectres (fig.2,4 et 5 du chapitre 6) sont données à la fin de l'exposé p.I44,145,146.

(+)- Formules pour l'émission β^-, pour l'émission β^+ il suffit d'y changer Z en $-Z$; les facteurs de correction Coulombienne F_0 sont donnés App.II, p.I26 (Eq.3)

E R R A T A

AVANT PROPOS-Lignes 12 et 13 : $\Delta J = 0$ ou I

page 2 - ligne I8 : α_1 et non α'_1

page 3 - Note(+) lire : Bethe [2] : référence bibliographique

page 7 - lignes 6 et 7

$$\begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} = - \frac{\sqrt{\Gamma(2\gamma+n'+1)}}{\Gamma(2\gamma+1)\sqrt{n'!}} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{4N(N-\kappa)}} \left(\frac{2\alpha L}{N}\right)^{\gamma} \left(\frac{2\alpha Z r}{N}\right)^{\gamma-1} e^{-\frac{\alpha Z r}{N}}$$

$$\times \left(\pm n' \Gamma\left(-n'+1, 2\gamma+1, \frac{2\alpha Z r}{N}\right) + (N-\kappa)\Gamma\left(-n', 2\gamma+1, \frac{2\alpha Z r}{N}\right)\right]$$

ligne 9 : $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2 Z^2}$

page 9 - ligne I7: $[L_z, V]$

ligne I9: vecteur et non secteur

page I5 - dernière ligne : $\vec{\sigma}^{(2)}.(\vec{r}_1 \wedge \vec{p}_2)$ en fin de ligne

page I9 - ligne 12 : $-\frac{1}{3} \vec{\sigma}^{(1)} \vec{\sigma}^{(2)}$

ligne 13: $r = |\vec{x}|$

page 2I- ligne 9 : $\vec{J} = \vec{l} + \vec{\sigma}$

ligne 18: $\psi_f^* p_3 \psi_i = (\psi_f^I)^* \psi_i^{II} - (\psi_f^I)^* \psi_i^I \# (\psi_f^{II})^* \psi_i^{II}$

page 24 - ligne I : J ligne 2 : J

ligne 3 : $J = |J + \theta_2 j_2|$ ligne 4 : $J = |J + \theta_1 j_1|$

page 25 - ligne 5 : $j_1 + j_2 = k$

ligne 26: $\Delta J = 0$ ligne 27: $\Delta J = 0,1$

page 28 - ligne 3 : $+ \sqrt{(L-M)(L+M+1)}\ {}^3(\sigma)_{-1}\ Y_L^{M+1}$

ligne 23: élément de matrice

page 29 - ligne I8: $\frac{\vec{X}}{r}$

page 30 - ligne 27: $C = R + 0,5\alpha(Z-1)$

ligne 28: $C = R - 0,5\alpha Z$

page 33 - ligne 7 : l'indice _ de ψ

page 34 - ligne 2 : pour $r >> 1$ en fin de ligne

page 35 - ligne 2 : $g^2_{-s-2} = \frac{q}{2R}\left[J_{\ell+\frac{1}{2}}(qR)\right]^2 = \frac{q}{2R}\left[J_{j+1}(qR)\right]^2$

page 37 - a) ψ et φ de type différent

dernière ligne : $|E^{III}|^2 \sim f_r^2 f^2_{-s-2} + g^2_{r-2} g_s^2$

page 4I - ligne 4 : Y_0

page 42 - ligne I : $\Delta L = n$

page 43 - ligne 16: ΔL ΔJ

page 45 - ligne 7 : supprimer j_1, m_1

ligne 8 : directions $\vec{p}, \vec{q}$ supprimer j_2, m_2

page 5I - ligne I : correspondant à L, L'

ligne 20: $\ell' - \ell = J' - J = 1$

...

E R R A T A

(suite)

page 52 - ligne 3 : $\Delta \ell$

page 53 - ligne 8 : $\Delta J = n - 1$

page 56 - dernière ligne : supprimer n devant $\Psi(1)$

page 57 - ligne I9 : $+ \Psi^{(A)}(1)\, \Delta_{1A}$ en fin de ligne

page 60 - ligne I4 : ΔL

page 62 - ligne 10 : à l'ordre n en fin de ligne

page 66 - ligne 5 : $\left| \psi_i \, d\tau \right|^2$ " " " "

ligne 2I : équations (1)

page 7I - ligne II : $\frac{q^2}{\pi} \frac{(qR)^{2s}}{[1 \times 3 \times \ldots \times (2s+1)]^2} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{\gamma_r + r + 1}{2r+2} \left[\frac{r!}{(2r+1)!}\right]^2 F_r (2p R)^{-r} \varepsilon_p$

page 72 - ligne 20 : $p^4 R^{\ldots} \frac{3+\gamma_2}{6} F_2$ en fin de ligne

ligne 26 : [24] au lieu de [2I]

page 74 - ligne 5 : $\gamma_n^{-\mu} \Psi_J^M \Big|^2$ en fin de ligne

ligne 18 : $\sum a_+^2 |m_n^-|^2 + a_-^2 |m_n^+|^2 + a_z^2 |m_{nz}|^2 + (a_+ a_- m_n^+ m_n^- + a_+ a_z m_n^- m_n^z + a_z a_- m_{nz} m_n^+ + cc)$

page 76 - ligne 5 : $2 \alpha_{rs}^2 \frac{A_n + 4B_n}{(2r+1)(2s+1)}$ en fin de ligne

page 77 - ligne 25 : $|^2$ " " " "

page 78 - ligne 9 : $f_{-r-2}\, g_{-s-2}$ " " " "

page 80 - ligne 3 : $- f_r g_r$ " " " "

page 8I - ligne II : $k = n + 1$ " " " "

page 83 - ligne 6 : $\frac{\gamma_r + r + 1}{2r+2} F_r$ " " " "

page 85 - avant dernière ligne : $\frac{r+1+\gamma_r}{2r+2} F_r$ " " "

page 87 - ligne 8 : $\frac{r+1-\gamma_r}{2r+2} F_r$ " " "

page 89 - ligne 9 : $\frac{4(n-3)rs + 2n^2 - n + 1}{4rs + 2n + 1}$ " " "

ligne II : $\mathcal{P}_n^{\ldots} |^2$ " " "

page 92 - ligne I6 : $- f_{-r-2} f_s$ " " "

page I02- ligne dernière : Note (+) <u>oui</u> en fin de ligne

page I07- ligne I9 : e^- " " " "

page I09- ligne 26 : 4×10^4 " " " "

page III- ligne 9 : $|^A G_2|^2$ " " " "

dernière ligne : lire "redéterminé"

page II7- ligne II : $\vec{x} \longrightarrow \vec{x}' = \vec{x} - \vec{\varepsilon} \wedge \vec{x}$

ligne I7 : fin de ligne $\varepsilon_z \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi$

page I27- ligne I2 : $(2 - n') r^2]$

page I28- ligne I4 : quand $r \longrightarrow r + 1$

page I30- ligne 3 : $(r+1)^2]$ en fin de ligne.

Emission β - Capture K - Transitions interdites

INTRODUCTION.-

Depuis la première théorie de Fermi [1], le traitement théorique de l'émission β par les noyaux est analogue à celui de l'émission des spectres atomiques.

On admet un couplage entre les nucléons (protons ou neutrons) d'une part et le champ électron-neutrino (+) de l'autre, comme il y a couplage entre les électrons et le champ de photons.

La différence essentielle est que le premier est associé à une paire de corpuscules de spin 1/2 entier obéissant à la statistique de Dirac, tandis que le second est associé à un seul corpuscule de spin entier obéissant à la statistique de Bose.

D'autre part, par correspondance avec l'électromagnétisme classique, on a immédiatement connu la forme de l'interaction électron-champ de photons, tandis que l'interaction nucléon-champ de leptons n'avait pas d'analogue dans la physique macroscopique.

Nous indiquerons d'abord la représentation de l'électron et du neutrino; puis les caractères généraux de celle du noyau, suivant les hypothèses faites sur les modèles ou les forces nucléaires; enfin les formes possibles de couplage nucléon-leptons et celles qui paraissent s'adapter le mieux aux faits expérimentaux.

Nous en déduirons ensuite les règles de sélection relatives aux différents ordres d'interdiction; les formes des spectres et les valeurs des probabilités de transition correspondantes pour deux formes de couplage nucléon-leptons en faisant diverses hypothèses générales sur les couplages entre nucléons.

(+) Par la suite, nous donnons le nom commun de "lepton" à l'électron et au neutrino, comme le fait Rosenfeld.

I - FORMALISME GENERAL.-

I 1- Fonctions d'onde des leptons.-

On doit prendre les fonctions d'ondes Relativistes pour le neutrino, de masse propre nulle, et pour l'électron en général (sauf pour les spectres mous dont la limite supérieure E_0 serait petite devant l'énergie au repos m_0c^2 = 5II KeV de l'électron).

D'ailleurs , l'électron émis est placé dans le champ Coulombien du noyau; nous prendrons donc les solutions du spectre continu (émission β) et discontinu (capture K) du problème de Képler dans la théorie de Dirac. Pour les équations de Dirac, nous utilisons la forme utilisée par Bethe (2), Rose (3), Hill et Landshoff (4) ainsi que dans (5) :

$$\frac{i}{\hbar c}\left(W + m_0c^2 + \frac{Ze^2}{r}\right)\psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_4 + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0$$

$$\frac{i}{\hbar c}\left(W + m_0c^2 + \frac{Ze^2}{r}\right)\psi_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_3 - \frac{\partial \psi_4}{\partial z} = 0 \qquad (I)$$

$$\frac{i}{\hbar c}\left(W - m_0c^2 + \frac{Ze^2}{r}\right)\psi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0$$

$$\frac{i}{\hbar c}\left(W - m_0c^2 + \frac{Ze^2}{r}\right)\psi_4 + \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_1 - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0$$

Elles sont formées avec les matrices de Dirac α_1, α_2, α_3, à 4 lignes, 4 colonnes suivantes :

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} (1) & 0 \\ 0 & (-1) \end{pmatrix}$$

où σ_1 ; σ_2, σ_3 sont les matrices de spin de Pauli à 2 lignes, 2 colonnes :

.....

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et : } (I) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \qquad (-1) = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En prenant des coordonnés sphériques r, θ, φ (le noyau est considéré comme fixe à l'origine des coordonnées), les solutions dépendent des 2 nombres quantiques 1/2 entiers :

m nombre quantique magnétique : projection sur Oz($\theta = 0$) du moment angulaire, j nombre quantique de moment angulaire total ,

Pour des valeurs données de j, m, W on a 2 types de solutions.

Type a :

$$\psi_1 = i \left(\frac{j - m + 1}{2j + 2}\right)^{\frac{I}{2}} Y^{m - \frac{1}{2}}_{j + \frac{1}{2}} f_\ell$$

$$\psi_2 = -i \left(\frac{j + m + 1}{2j + 2}\right)^{\frac{1}{2}} Y^{m + \frac{I}{2}}_{j + \frac{1}{2}} f_\ell$$

$$\psi_3 = \left(\frac{j + m}{2j}\right)^{\frac{I}{2}} Y^{m - \frac{1}{2}}_{j - \frac{1}{2}} g_\ell$$

$$\psi_4 = + \left(\frac{j - m}{2j}\right)^{\frac{I}{2}} Y^{m + \frac{I}{2}}_{j - \frac{1}{2}} g_\ell$$

Type b :

$$\psi_1 = i \left(\frac{j + m}{2j}\right)^{\frac{1}{2}} Y^{m - \frac{1}{2}}_{j - \frac{1}{2}} f_{-\ell-1}$$

$$\psi_2 = +i \left(\frac{j - m}{2j}\right)^{\frac{1}{2}} Y^{m + \frac{1}{2}}_{j - \frac{1}{2}} f_{-\ell-1}$$

$$\psi_3 = \left(\frac{j - m + 1}{2j + 2}\right)^{\frac{1}{2}} Y^{m - \frac{1}{2}}_{j + \frac{1}{2}} g_{-\ell-1}$$

.....

(*) Dans Bethe (2) on a les signes opposés pour ψ_2 et ψ_4 à cause d'une différence de signe dans la définition des Y^m_ℓ.

$$\psi_4 = -\left(\frac{j+m+1}{2j+2}\right)^{\frac{1}{2}} Y^{m+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} \qquad g - \ell - 1$$

Les $Y(\theta, \varphi)$ sont des fonctions sphériques de Laplace normées les f, g (r) sont des fonctions radiales.

Dans le cas non Relativiste où $W - m_0c^2 = E \ll m_0c^2$ on voit d'après (1) que :

$$\left|\frac{\psi_1 \text{ ou } \psi_2}{\psi_3 \text{ ou } \psi_4}\right|^2 \approx \frac{W - m_0c^2}{W + m_0c^2} \approx \frac{E}{2m_0c^2} \ll 1$$

$$\left|\frac{f}{g}\right|^2 \approx \frac{E}{2m_0c^2} \approx \frac{v^2}{4c^2} \qquad \text{également}$$

Si l'on néglige complètement les corrections de Relativité, on est conduit à ne conserver que les grandes composantes ψ_3, ψ_4.

Alors, on peut parler d'un nombre quantique de moment orbital l entier qui est

$l = j - \frac{1}{2} \longrightarrow \underline{j = l + \frac{1}{2}}$ pour le type a ;

$l = j + \frac{1}{2} \longrightarrow \underline{j = l - \frac{1}{2}}$ pour le type b,

On retrouve alors la théorie initiale de Pauli pour tenir compte du spin, avec une fonction d'onde à 2 composantes.

En tenant compte des corrections de Relativité, l n'est plus un " bon " nombre quantique; il n'a pas de signification physique exacte; c'est seulement l'indice des Y correspondant aux grandes composantes. Lorsque $v \approx c$, il perd toute signification.

Cela résulte du fait que la théorie Relativiste introduit un couplage spin-orbite spécial; le moment orbital l n'est plus alors une constante du mouvement; c'est le moment angulaire total, $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ qui est constant (+), tandis que l peut prendre les valeurs $j - \frac{1}{2}$, $j + \frac{1}{2}$ au cours du mouvement, une des valeurs étant beaucoup plus probable que l'autre lorsque $\frac{v}{c} \ll 1$.

Pour faciliter le passage de la théorie de Dirac à l'approximation non Relativiste, il est commode de prendre, comme

(+) Nous reviendrons sur cette manière de s'exprimer au § 1-2.

le fait Rosenfeld (6), deux jeux d'indices 1 et 2, au lieu du seul jeu 1, 2, 3, 4 pour numéroter les composantes de ψ. On pose :

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_+^1\\ \psi_2 &= \psi_-^1\end{aligned}\right\}\psi^I \qquad \left.\begin{aligned}\psi_3 &= \psi_+^{II}\\ \psi_4 &= \psi_-^{II}\end{aligned}\right\}\psi^{II}$$

où $\left|\frac{\psi^I}{\psi^{II}}\right| \approx \frac{v}{c}$,plus précisément la valeur moyenne : $\left\langle\left|\frac{\psi^I}{\psi^{II}}\right|^2\right\rangle \approx \frac{1}{4}\ \frac{v^2}{c^2}$

l'indice + correspondant à la composante de spin $s_z = +\frac{1}{2}$

l'indice - correspondant à la compposante de spin $s_z = -\frac{1}{2}$

Pour les indices I et II, tout se passe d'après les équations (I) comme s'ils correspondaient aux masses propres $-m_0$, $+m_0$.

On introduit alors les matrices opérant sur les indices I, II $\rho_3 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & +1\end{pmatrix}$ $\rho_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

tandis que les matrices (3) de Pauli opèrent sur + et -.

D'après (2) on peut écrire $\vec{\alpha} = \rho_1 \vec{\sigma}$ $\beta = -\rho_3$. où $\vec{\alpha}$ a pour composantes α_1, α_2, α_3 et $\vec{\sigma}$ σ_1, σ_2, σ_3

Il nous reste à indiquer les expressions des fonctions radiales (♀) :

III - Celles du <u>neutrino</u> (ν) appartiennent toujours au <u>spectre continu</u>

$$j = l + \frac{1}{2} \quad \begin{cases} f_l = \left(\frac{q}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{3}{2}}(qr) \\ g_l = -\left(\frac{q}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(qr) \end{cases}$$

$$j = l - \frac{1}{2} \quad \begin{cases} f_{-l-1} = \left(\frac{q}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l-\frac{1}{2}}(qr) \\ g_{-l-1} = \left(\frac{q}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(qr) \end{cases}$$

.....

(6) Rosenfeld L.-"Nuclear Forces" T.I,p.50. Cet ouvrage sera désigné dans la suite par N.F.

(♀) Nous donnons les fonctions du spectre continu normées par intervalle d'énergie.

où $J_{n+\frac{1}{2}}$ est une fonction de Bessel classique (d'indice 1/2 entier)

q est l'impulsion du ν en unités m_0c (ou l'énergie en unités m_0c^2).

r distance à l'origine en $\frac{\hbar}{m_0c}$ = 3..,9. 10^{-11} cm.

Si ε est l'énergie totale emportée par l'électron émis, en unités m_0c^2 ($\varepsilon = \frac{W}{m_0c^2}$), et ε_0 celle qui correspond à la limite supérieure du spectre, le ν emporte l'énergie $\varepsilon_0 - \varepsilon = q$

$q \leq \varepsilon_0 - 1 = \frac{E_0}{m_0c^2}$

$qr \leq (\varepsilon_0 - 1)\, R$ dans le domaine nucléaire

R rayon du noyau = 3,8. 10^{-3} $A^{1/3}$ en $\frac{\hbar}{m_0c}$

$\varepsilon_0 - 1 = \frac{E_0\ \text{KeV}}{511}$: cas extrêmes $E_0 \approx 12$ MeV (^{12}B, ^{8}Li) $\longrightarrow \varepsilon_0 - 1 \approx 25$

$(\varepsilon_0 - 1)\, R \approx 0{,}25$.

On a donc toujours $qr \ll 1$ dans l'étendue du noyau.

Or pour $|z| \ll 1$, $J_{n+\frac{1}{2}}(z) \approx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{z^{n+1/2}}{1.3.\ldots.(2n+1)}$

de sorte que f, g, sont de l'ordre de : $\left(\frac{q}{r}\right)^{1/2} (qr)^{n+1/2} = q(qr)^n$, ou $(qr)^j$

$j = l + \frac{1}{2}$ $\begin{cases} f_l & n = l + 1 = j + \frac{1}{2} \\ g_l & n = l \quad\ = j - \frac{1}{2} \end{cases}$

qui sont justement les indices des fonctions de Laplace associées à f_l, g_l

$j = l - \frac{1}{2}$ $\begin{cases} f_{-l-1} & n = l - 1 = j - \frac{1}{2} \\ g_{-l-1} & n = l \quad\ = j + \frac{1}{2} \end{cases}$

f_{-l-1}, g_{-l-1} étant encore associées à $Y_{j-1/2}$, $Y_{j+1/2}$ respectivement.

Dans tous les cas, l'ordre de grandeur de la fonction radiale pour le neutrino est égal à l'indice inférieur de la fonction Y associée.

II2 - Pour l'électron, on a besoin des fonctions d'onde du spectre discontinu (capture K) comme de celles du spectre continu (émission β).(*)

Nous groupons les valeurs de f, g pour les deux types de solutions en posant :

$K = -(j + \frac{1}{2}) = -(l+1)$ si $j = l + \frac{1}{2}$ (type a)

$K = j + \frac{1}{2} = l$ $\quad j = l - \frac{1}{2}$ (type b)

a - Pour le spectre discontinu

$$\begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} = - \frac{\sqrt{\Gamma(2\gamma+n'+1)}}{\Gamma(2\gamma+1)\sqrt{n'!}} \sqrt{\frac{1 \mp \varepsilon}{4N(N-K)}} \frac{(2Z)}{(N)}^{3/2} \left(\frac{2Zr}{N}\right)^{\gamma-1} e^{-\frac{\alpha Zr}{N}}$$

$$x \left(\pm n' F(-n'+1, 2\gamma+1; \frac{2\alpha Zr}{N}) + (N-K) F(-n', 2\gamma+1; \frac{2\alpha Zr}{N})\right)$$

Z charge du noyau, $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ constante de structure fine

$\gamma = \sqrt{K^2 - \alpha^2 Z^2}$, n' nombre quantique radial

$N = \sqrt{n^2 - 2n'(|K| - \gamma)} = \sqrt{(n'+\gamma)^2 + \alpha^2 Z^2}$ $\quad (n = n' + |K|)$

$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{N^2}} = \frac{n'+\gamma}{N} \longrightarrow \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{\alpha Z}{N}$

(A l'approximation non Relativiste N=n devient le nombre quantique principal).

$$F(a,b;x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} \cdot \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)} \frac{x^n}{n!}$$

fonction hypergéométrique confluente, se réduisant ici à un polynôme.

$$\frac{\alpha Z}{N} \approx \frac{\alpha Z}{n} \approx \frac{u}{c},$$

u étant la vitesse de l'électron sur son orbite dans le modèle de Bohr.

$$\frac{\alpha Zr}{N} \approx \frac{mu}{\hbar} \cdot r_{cm} \approx \frac{r}{a}$$

a rayon de l'orbite de Bohr.

On a donc toujours $\frac{\alpha Zr}{N} \ll 1$ dans l'étendue du noyau. Développant f et g en série de puissances de $\frac{\alpha Zr}{N}$, le terme le plus grand est proportionnel à $(\frac{Zr\alpha}{N})^{j-1/2}$.

D'ailleurs $g \gg f$ tant que $\varepsilon \approx 1$ ou $\frac{\alpha Z}{N} \ll 1$

$\frac{1}{137}\frac{Z}{N} \ll 1$ sauf pour les éléments lourds. (Pour $Z \approx 95$, $\frac{Z}{137} \approx 0{,}7$)

b - Pour le spectre continu :

$$\begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} = \frac{(1 \mp \varepsilon)^{1/2} \quad (2pr)^{\gamma} \quad e^{\frac{\pi\alpha Z\varepsilon}{2p}} \left|\Gamma(\gamma + i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p})\right| \quad \ldots}{2r\,(\pi p)^{1/2}\,\Gamma(2\gamma+1)}$$

.....

$$x \left[e^{-ipr} \sqrt{} - (K - i\frac{\alpha Z}{p})(\gamma + i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p}) F(\gamma + 1 + i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p}, 2\gamma + 1; 2ipr) + c.c \right]$$

avec $p = (\varepsilon^2 - 1)^{1/2}$ impulsion de l'électron à grande distance du noyau

$(1 - \varepsilon)^{1/2} = +i(\varepsilon - 1)^{1/2}$ dans le cas de f

c.c désigne la quantité complexe conjuguée.

p varie de 0 à $\sqrt{\varepsilon_0^2 - 1}$, et l'on a toujours $pr < (\varepsilon^2 - 1)^{1/2} R$

$pr < (\varepsilon_0 - 1)(\varepsilon_0 + 1) R = \sqrt{\frac{E_0}{m_0 c^2}\left(\frac{E_0}{m_0 c^2} + 2\right)} R^0$

Dans les cas extrêmes, $E_0 \approx 12$ MeV $\gg m_0 c^2 \longrightarrow (\varepsilon_0^2 - 1)^{1/2} R \approx 25R$

$\approx 0{,}25$. En moyenne d'ailleurs $p \approx q$ (7) la région du maximum du spectre apportant la contribution la plus grande à cette moyenne

I 2 - Le noyau.-

L'émission β (ou la capture K) est liée à la transition entre deux états d'un nucléon. $n \longrightarrow p + e^- + \nu$ $p \longrightarrow n + e^+ + \nu$ Mais ce nucléon est lié à tous les autres qui constituent avec lui le noyau, (sauf pour la radioactivité du neutron) et il convient plutôt de parler de transition entre deux états du noyau. La considération d'états nucléoniques individuels dans le noyau est d'ailleurs, en principe, beaucoup moins justifiée que pour les électrons atomiques dont les interactions sont faibles, devant l'action Coulombienne du noyau.

En admettant que l'on puisse parler d'états individuels on ne peut pas dire qu'un nucléon déterminé se trouve dans tel état, à cause du principe d'indiscernabilité. Tous les nucléons échangent constamment leurs états d'espace, de spin, de charge.

I2I- Un caractère important d'un noyau est son moment angulaire (ou cinétique) propre.

En Mécanique classique, le moment cinétique par rapport à l'origine O d'un point matériel P_k ayant la quantité de mouvement $\vec{p}_k$ est le vecteur : $\vec{M}_k = \overrightarrow{OP}_k \wedge \vec{p}_k = \vec{x}_k \wedge \vec{p}_k$

de composantes : $M_{kx} = y_k p_{kz} - z_k p_{ky}$ (1) etc...

et le moment cinétique d'un système de points matériels est :

$$\vec{M} = \sum_k \vec{M}_K$$

.....

En Mécanique quantique, on sait qu'il faut remplacer toutes les grandeurs classiques par des grandeurs dont les produits ne sont pas commutatifs en général, représentables par des matrices, cette non commutation étant liée à l'indétermination quantique.

En particulier, les coordonnées Cartésiennes et les composantes des impulsions vérifient les relations de commutation :

$$p_x x - x p_x = \frac{\hbar}{i}$$
$$p_x y - y p_x = 0, \text{ etc...} \qquad (2)$$

En remplaçant dans (I) x, y, z, p_x, p_y, p_z par ces opérateurs on obtient les grandeurs représentant les composantes du moment orbital en théorie quantique : M_x, M_y, M_z

On trouve alors (8) que

$$M_z x - x M_z = [M_z, x] = -\frac{\hbar}{i} y \quad \text{par exemple}$$

soit, en posant $M_x = \hbar L_x$ etc...

$$[L_z, x] = i.y \qquad [L_z, y] = -ix \qquad [L_z, z] = 0$$

En général, si V est un vecteur, l'opération L_z, V équivaut à une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Oz et à une multiplication par i de ce secteur.(+)

Les composantes L_x, L_y sont de même associées aux rotations autour de Ox, Oy.

L'opération $[L_z, ...]$ appliquée à une grandeur mécanique quelconque équivaut à une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Oz (et à une multiplication par i).

En particulier :

$$[L_z, L_x] = iL_y \qquad [L_z, L_y] = -iL_x \quad \text{tandis que :}$$

(3)
$$[L_z, L^2] = [L_y, L^2] = [L_x, L^2] = 0 \qquad (L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \text{ invariant})$$

(+) Il s'agit d'un vecteur et non d'un champ de vecteurs: cf. App.I § II.

(les trois composantes de $\vec{L}$ ne sont pas simultanément mesurables)

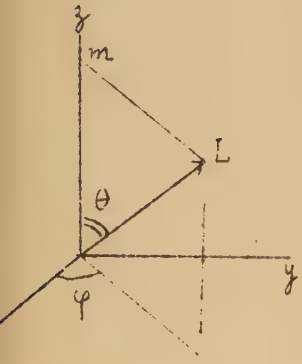


Fig. 1

On en déduit que les valeurs possibles de L_z sont les entiers m : $-l \leq m \leq l$, alors que la valeur de L^2 est $\hbar^2 l(l+1)$.

- ce qui correspond à la quantification dans l'espace du "vecteur" L : $\cos\theta = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}$ tandis que φ est indéterminé.

Pour un système : $\vec{L} = \sum_k \vec{L}_k$ est associé aux rotations de l'ensemble du système dans l'espace de configuration $x_1 \ldots\ldots x_k \ldots$; tandis que $\vec{L}_k$ est associé aux rotations dans l'espace x_k de la $k^{ème}$ particule seulement.

Supposons que $\vec{L}_1$, $\vec{L}_2$ correspondent à deux parties d'un système et $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ à l'ensemble

$L_1^2 = l_1(l_1+1)$ $\quad L^2 = l(l+1)$

$L_2^2 = l_2(l_2+1)$

On démontre en théorie des groupes (9) que les valeurs possibles de l sont : $l = l_1+l_2,\ l_1+l_2-1, \ldots\ldots |l_1-l_2|$ (4)

ce qui justifie le "modèle vectoriel"; dans un <u>diagramme</u>, on porte des vecteurs $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ de longueurs l_1, l_2; l est la longueur du vecteur $\vec{l} = \vec{l}_1+\vec{l}_2$ si l_1, l_2 font entre eux l'un des angles tels que(4) soit vérifié

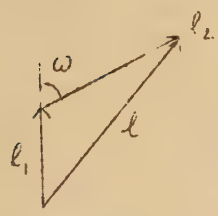


fig.2

(En particulier $\omega = 0 \longrightarrow l = l_1+l_2$, $\omega = \pi \longrightarrow l = l_1-l_2$)

Mais $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ n'ont pas de rapport simple avec les vecteurs $\vec{L}_1, \vec{L}_2$ dans la mesure où ceux-ci sont définis (fig.1).

L'expérience a montré que la notion de moment orbital est insuffisante; on doit attribuer à tout corpuscule élémentaire un moment angulaire propre, ou spin, de sorte que l'on a pour un système le moment total :

$$\vec{J} = \sum_k \vec{L}_k + \sum_k \vec{S}_k \qquad \text{en unités } \hbar$$

$$\underline{\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}}$$

.....

Chaque S_{kz} peut prendre les valeurs $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$ et
$S_k^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}$

de sorte que : $S^2 = s\,(s+1)$, $J^2 = j\,(j+1)$ avec s et j entiers ou demi-entiers.

Pauli a trouvé une représentation du spin S d'un corpuscule élémentaire à l'aide des matrices σ_1, σ_2, σ_3 (3- § 11) opérant sur une fonction d'onde à deux composantes

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$$

vérifie les mêmes propriétés (3) et (4) que $\vec{L}$ et est donc associé aux rotations; on peut dire (♀) que $\vec{\sigma}^{(k)}$ correspond à une rotation dans l'espace du spin de la $k^{ème}$ particule (ou, si l'on veut, rotation sur elle-même) pour traduire le fait que :

$$\left[L_{kz}, \vec{\sigma}^{(k)}\right] = 0 \qquad \left[\sigma_z^{(k)}, \vec{L}_k\right] = 0$$

Il importe de savoir si $\vec{J}$, $\vec{L}$, $\vec{S}$ sont bien définis en même temps que l'état d'énergie du noyau.

Une grandeur G a cette propriété (ou est une constante du mouvement) si $[G, H] = 0$
H étant l'Hamiltonien du système (énergie exprimée en fonction des coordonnées et des moments conjugués.).
H, pour un système isolé (noyau), est nécessairement invariant pour les rotations d'ensemble. Donc : $[\vec{J}, H] = 0$
L'état du noyau est caractérisé par un nombre quantique j tel que $J^2 = j\,(j+1)$ et par un nombre m tel que $J_z = m$ $\quad -j \leqslant m \leqslant j$.
En fait, les 2j+1 valeurs de m correspondent à un même état d'énergie, sauf en présence d'un champ magnétique extérieur.
D'où le nom de nombre quantique magnétique attribué à m.

I22- H est aussi invariant dans les symétries par rapport à l'origine.
Il en résulte que la fonction d'onde $\psi \longrightarrow +\psi$ ou $\psi \longrightarrow -\psi$ dans ces symétries.

.....

(♀) En réalité, dans une rotation du trièdre de référence, on doit considérer que σ_1, σ_2, σ_3 se transforment comme les composantes d'un vecteur opérant sur des composantes scalaires de ψ, ou bien que σ_1, σ_2, σ_3 sont des scalaires opérant sur un spineur (N.F.T.I.p.43) - cf. App. I § I2.

Dans le premier cas, on dit que l'état du noyau est pair,
Dans le deuxième cas, qu'il est impair.

I23 - En faisant certaines hypothèses, approximativement vérifiées, sur les forces nucléaires ou la structure du noyau, on peut montrer que l, s , sont aussi bien définis en même temps que l'état d'énergie.

1°- L'interaction entre deux nucléons est <u>centrale</u>, c'est-à-dire, qu'elle ne dépend de leurs positions que par leur distance r : potentiel V (r).

Elle peut dépendre aussi de leurs spins (et de leurs charges), mais le potentiel d'interaction est <u>séparément</u> invariant par rotations d'ensemble dans l'espace ordinaire, et par rotations dans l'espace des spins.

Pour les nucléons 1, 2, le potentiel est par exemple de la forme $\vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2)\ V\ (r_{12})$

Nous excluons donc des termes de couplage spin-orbite tels que $\vec{\sigma}(1)\vec{L}_1$, $\vec{\sigma}(1)\vec{L}_2$, $\vec{\sigma}(1)\vec{x}_2$ etc... invariants pour des rotations totales (espace et spin).

Nous négligeons donc les corrections de Relativité,(♀) les équations de Dirac introduisant un couplage de ce type.

On a alors $\left[\vec{L},\ H\right] = 0$

$\left[\vec{S},\ H\right] = 0$

L_z et L^2, S_z et S^2 sont bien définis.

avec $\vec{L} = \sum_k \vec{L}_k$, $\vec{S} = \sum_k \vec{S}_k$

et $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

c'est-à-dire que nous avons des nombres quantiques l, s, j, se composant suivant la règle (4).

C'est la règle de <u>Russell-Saunders</u> qui est ainsi justifiée en l'absence de couplages spin-orbite.

.....

(♀) Pour les nucléons dans le noyau, on doit avoir $\lambda\!\!\!^{-} \approx r_0 = 1{,}48 \times 10^{-13}$cm, ce qui conduit à $\frac{v}{c} \simeq \frac{1}{3}$, sensiblement en accord avec $\frac{1}{2} Mv^2 \approx 13$ MeV, ($Mc^2 = 939$ MeV) : d'après l'étude de $^2_1 H$, $V_0 \approx -21$ (V_0 = V moyen par nucléon pour les noyaux moyens et $E \approx -8$ MeV de liaison).

Dans ce cas, d'ailleurs, on peut considérer la fonction d'onde ψ comme la somme de produits de deux facteurs, l'un (σ) dépendant des variables de spin seules (indices $\pm$), l'autre des variables d'espace.

$\psi = \sum_{(\sigma)} \psi_{(\sigma)}(x_1 \ldots\ldots x_A)$ suivant la formule des groupes de rotation).

C'est bien ce qui apparait sur les expressions (4- § 11) pour un corpuscule unique lorsqu'on néglige ψ^I devant ψ^{II}.

Alors : $\psi_+ = \left(\frac{\ell + m + \frac{1}{2}}{2\ell+1}\right)^{1/2} Y_\ell^{m-\frac{1}{2}} g_\ell$ ou $\left(\frac{\ell - m + \frac{1}{2}}{2\ell+1}\right)^{1/2} Y_\ell^{m-\frac{1}{2}} g_{-\ell-1}$

$$\psi_- = \left(\frac{\ell - m + \frac{1}{2}}{2\ell+1}\right)^{1/2} Y_\ell^{m+\frac{1}{2}} g_\ell \text{ ou } -\left(\frac{\ell + m + \frac{1}{2}}{2\ell+1}\right)^{1/2} Y_\ell^{m+\frac{1}{2}} g_{-\ell-1}$$

Donc : Type a type b

pour le type a :

$$\psi = \sqrt{\frac{\ell + m + \frac{1}{2}}{2\ell+1}}\, v_+ \cdot Y_\ell^{m-\frac{1}{2}} g_\ell + \sqrt{\frac{\ell - m + \frac{1}{2}}{2\ell+1}}\, v_- Y_\ell^{m+\frac{1}{2}} g_\ell$$

pour le type b :

$$\psi = \sqrt{\frac{\ell - m + \frac{1}{2}}{2\ell+1}}\, v_+ \cdot Y_\ell^{m-\frac{1}{2}} g_{-\ell-1} - \sqrt{\frac{\ell + m + \frac{1}{2}}{2\ell+1}}\, v_- Y_\ell^{m+\frac{1}{2}} g_{-\ell-1}$$

(en accord avec formule des groupes) (♀)

v_+, v_- fonctions des variables de spin étant les matrices :

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_- = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$$

Enfin la parité est ici <u>celle de ℓ</u>, comme il résulte du fait que :

$Y_\ell^m(\theta, \varphi) \longrightarrow Y_\ell^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ par symétrie.

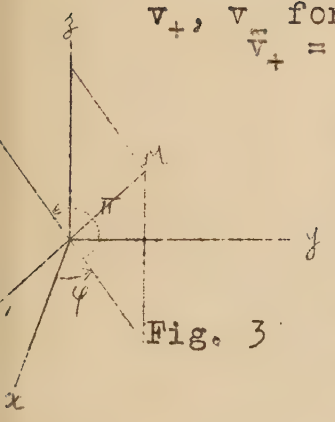


Fig. 3

Si l'hypothèse initiale est vérifiée seulement d'une manière approchée, un état du noyau correspond à un mélange d'états l, s $\psi = \sum_i \psi(l_i, s_i)$ .....

(♀) Cf. App. I. § 2.

mais l'un des états est prédominant

$$\psi(l_m, s_m) \gg \psi(l_i, s_i) \qquad \text{où} \quad i \neq m$$

Ces valeurs l_i, s_i se combinent en une valeur j unique.

Toutes les valeurs de l_i ont la même parité si l'on néglige les corrections de Relativité. (♀)

Remarque.-

Si H ne dépend pas des spins (interactions en $\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}$ elles-mêmes exclues), on a une propriété de plus; l'énergie du système ne dépend que de la valeur L, et non de S, c'est-à-dire que les 2S + I états : J = L + S, L + S - 1,..... |L - S| , ont même énergie.

Ils forment un multiplet.

Ceci est vérifié approximativement pour les électrons atomiques. (pour un électron dans un champ central on a le doublet $j = l + \frac{1}{2}$, $j = l - \frac{1}{2}$ qui correspond aux solutions (a) et (b) en théorie de Dirac). Cependant leurs interactions séparent faiblement les composantes du multiplet.

Pour le noyau, Wigner, en admettant que H ne dépend pas non plus des états de charge en première approximation (forces de Majorana), aboutit à sa théorie des supermultiplets.

2°- Modèle quasi-atomique.-

Supposons que l'on puisse isoler dans le noyau un ensemble 0 de nucléons à symétrie sphérique dont :

$$\left.\begin{matrix} j_0 = 0 \\ s_0 = 0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow l_0 = 0 \quad (\vec{L}_0 \text{ par rapport à leur centre de gravité}).$$

Dans le modèle quasi-atomique, (11) on suppose que les autres nucléons sont soumis à l'action moyenne de cet ensemble, qui est grande devant leurs interactions.

.....

(♀) En théorie de Dirac, ceci n'est pas vérifié : on a un mélange d'états ℓ, ℓ-1 ou ℓ, ℓ+1. La parité doit être définie d'une manière plus générale tenant compte de la symétrie des spineurs :

$$\psi^{I} \longrightarrow -\psi^{I}, \quad \psi^{II} \longrightarrow \psi^{II} \ ;$$

La parité est celle de ℓ prédominant.

Ainsi, dans un noyau léger où $\underline{A = 4n + 1}$, en simplifiant à l'extrême 4n nucléons formeraient cet ensemble.
1 nucléon se placerait sur une " couche " extérieure.

Pour $\underline{A = 4n + 2}$, on aurait deux extra-nucléons.

$\underline{A = 4n + 3 = 4n' - 1}$; on peut considérer un " trou " dans l'ensemble 4n', ce qui ramène au modèle 4n + 1.

Il est alors naturel d'admettre que l'action de l'ensemble 0 sur le nucléon 1 ne dépend que de la distance r de son centre de gravité à 1.

On est alors ramené au problème des forces centrales traité au 1°/, et au couplage Russell-Saunders.

Le seul terme non central qui pourrait exister serait en $\vec{\sigma}(I)\ \vec{L}_1$ puisque : $\vec{S}_0 = \vec{L}_0 = 0$, $\vec{x}_0 = 0$

$\vec{\sigma}(1)\ \vec{L}_1 = (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(0))\ (\vec{L}_1 + \vec{L}_0)$: d'ailleurs

$= \vec{\sigma}\ \vec{L}$

$\left[\vec{\sigma}\ \vec{L},\ L^2\right] = \vec{\sigma}\left[\vec{L},\ L^2\right] = 0$

$\left[\vec{\sigma}\ L,\ \vec{\sigma}^2\right] = \vec{L}\left[\vec{\sigma},\ \vec{\sigma}^2\right] = 0$

Donc l, s sont bien définis dans cette hypothèse, bien que L_z, S_z ne le soient pas. (cf. (IO)).

L'existence de l, s, est donc compatible même avec un fort couplage spin-orbite de ce type que supposent certains auteurs dans ce modèle.

Cette propriété ne subsiste pas cependant si l'on n'admet pas ce même fort couplage entre deux extra-nucléons puisqu'alors :

$$\vec{\sigma}.\ L = (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2))\ (\vec{L}_1 + \vec{L}_2)$$

$$= \vec{\sigma}(1)\ \vec{L}_1 + \vec{\sigma}(2) L_2 + \underline{\vec{\sigma}(1)\ L_2 + \vec{\sigma}(2)\ L_1}$$

En fait, cette dernière forme de couplage ne correspond pas aux interactions usuelles. Ainsi, si l'on considère l'action du champ électrique central créé par une particule, sur le moment magnétique en mouvement de l'autre (effets Larmor et Thomas), on obtient au Ier ordre en $\frac{v}{c}$, entre les particules 1 et 2, un couplage en ;

$$\vec{\sigma}(1)\ (\vec{x}_1 \wedge \vec{p}_1) + \vec{\sigma}(2)\ (\vec{x}_2 \wedge \vec{p}_2) - \vec{\sigma}(1)(\vec{x}_2 \wedge \vec{p}_1) - \vec{\sigma}(2)(\vec{x}, \wedge$$

.....

où les 2 derniers termes ne peuvent s'exprimer à l'aide des $\vec{L}$ - c'est seulement dans le cas où l'une des particules est supposée fixe à l'origine des coordonnées que l'on a le couplage :

$$\frac{\hbar}{(2M)^2}\ \frac{1}{2}\ \frac{dV}{dr}\ \vec{\sigma}(\vec{x}\wedge\vec{p}) \quad \text{en} \quad \vec{\sigma}.\vec{L}$$

(N.F. T.II.p.3I5).

- Cependant, même s'il n'existe pas un " bon nombre quantique ", on peut avoir une valeur ℓ_m correspondant à un état prédominant, et cette valeur permet de classer les niveaux. C'est ce sens que les auteurs, qui traitent de modèles à couches nucléaires, attribuent à ℓ - Ces modèles, qui supposent des états nucléoniques individuels successivement remplis, sont évidemment assez simplistes et ne prétendent pas donner des valeurs quantitatives (d'énergies de liaison par exemple). Ils visent surtout à expliquer :

a) L'existence des "nombres magiques" : nuclides particulièrement stables et nombreux pour

$$Z = 50, 8\ 2$$
$$N = 50\ (?),\ 8\ 2,\ 126 \quad (N : \text{nombre de neutrons})$$

Les auteurs admettent que les ensembles N ou Z = 2, 8, I0, 20 sont particulièrement stables aussi.

b) Les valeurs des moments magnétiques des noyaux de A impair, et les valeurs des moments angulaires des noyaux. A cet égard, ces modèles donnent des résultats meilleurs que les modèles continus (goutte liquide).

Les premiers travaux sur ce modèle sont exposés dans Bethe et Bacher (I2). Les niveaux individuels sont ceux d'une particule dans un puits de potentiel rectangulaire à parois infinies (Elsasser), qui se rattachent d'ailleurs à ceux du potentiel parabolique d'un oscillateur (Heisenberg), en tenant compte de la dégénérescence dans ce dernier cas.

Récemment, trois systèmes d'hypothèses ont été proposés pour rendre compte au mieux des faits.

a) Nordheim (I3) prend pour base l'ordre des niveaux dans le puits du potentiel rectangulaire, et fait le minimum de changements

.....

nécessaires (interversions de niveaux) pour rendre compte des nombres magiques.

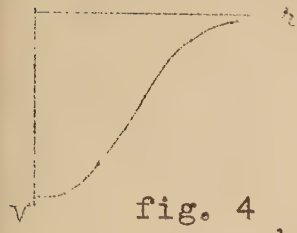


fig. 4

L'inversion des niveaux les plus bas est attribué au fait que, pour les noyaux légers, la densité des nucléons est plus grande au centre, ce qui conduit un potentiel ayant en gros, la forme de la figure 4.

b) Feenberg et Hammack (11) font la même hypothèse pour les noyaux légers, mais remarquent que, pour les noyaux lourds, la répulsion Coulombienne des protons augmente la densité des nucléons à la périphérie d'où un potentiel nucléaire en " fond de bouteille (figure 5).

fig. 5

Ceci a pour effet d'élever les niveaux qui correspondraient à une grande densité nucléaire au centre. Ils admettent que cette élévation augmente avec A, d'où une inversion des niveaux permettant d'expliquer les nombres magiques.

(a) et (b) supposent un faible couplage spin-orbite et sont donc en accord avec un couplage Russell-Saunders entre nucléons. Ils reposent, en fait, sur des procédés assez artificiels.

c) M. Goeppert-Mayer (I4) applique plus systématiquement des hypothèses de base qui semblent plus naturelles.

Elle admet un potentiel voisin du potentiel parabolique (oscillateur).

- un fort couplage spin-orbite croissant avec ℓ et donnant lieu à des doublets " inversés " : le niveau $j = \ell + \frac{1}{2}$ est toujours plus bas que $j = \ell - \frac{1}{2}$. L'écart des doublets de spin peut ainsi atteindre ou dépasser l'écart des niveaux du potentiel moyen considéré.
- pour un nombre pair de nucléons identiques les j se composent pour donner un moment angulaire et un moment magnétique résultant nuls (<u>saturation</u>) .
- le couplage j-j (négatif) entre différents nucléons décroit en valeur absolue quand j augmente, ce qui favorise les faibles valeurs de J pour le noyau.

.....

α) Est compatible avec un couplage Russell-Saunders, si le couplage spin-orbite est en $\vec{L}.\vec{S}$ et si l'on considère un seul extra-nucléon. Grâce à l'hypothèse de saturation, on peut le faire si, en principe, A est impair ($A = 4n \pm 1$), mais non pour A pair Z impair par exemple (N et Z impairs). De toute façon, il faut ici introduire un couplage j-j entre nucléons (comme pour les électrons planétaires dinternes des éléments lourds), dès que l'on s'écarte du modèle extrême à un seul nucléon.

3°- Modèle à particules α .-

L'ensemble O se trouve remplacé par plusieurs particules α à symétrie sphérique:
$s_\alpha = o$ pour chacune d'elles, mais $l_\alpha \neq o$ est possible (par rapport au centre de masse du noyau).

Les interactions entre particules α sont centrales et les se composent donc en un moment orbital $\vec{K}$.

En fait, les auteurs qui ont utilisé ce modèle ont supposé les particules α liées d'une manière presque rigide, l'ensemble ayant un moment angulaire de rotation $\vec{K}$, pour rendre compte du fait que les noyaux formés de particules α seulement ($^{2}_{1}C$, $^{16}_{8}O$ etc...) toujours ont un moment angulaire nul dans l'état fondamental. $\vec{K}$ se compose avec les moments angulaires des extra-nucléons et l'on a donc couplage Russell-Saunders si les couplages spin-orbites sont faibles pour ces extra-nucléons seulement.

CONCLUSION.-

Parmi les modèles actuellement proposés pour rendre compte des moments angulaires (et magnétiques) mesurés, certains supposent un faible couplage spin-orbite (Nordheim, Feenberg), et s'accordent donc avec un couplage Russell-Saunders. D'autres supposent un fort couplage spin-orbite (M.Goeppert-Mayer) et un couplage j-j (ℓ permet alors de classer les niveaux, mais ne correspond pas à un moment orbital bien défini). Dans ce dernier cas, on peut remarquer que le principe de saturation tend à ramener le problème à celui d'un nucléon (pour A impair) ou deux (1 proton, 1 neutron pour A pair, Z impair), dans un champ de forces centrales

.....

Mais ceci n'est exact que si les ensembles saturés de moment angulaire nul sont réellement condensés dans l'espace(♀), et cette simplification résulte donc plutôt du modèle à particules ∝ que du modèle de M.G. Mayer.

1°- Pour un seul nucléon, il semble que, seul, le couplage relativiste (de Dirac) entre son spin et son moment orbital empêche ℓ d'être un "bon nombre quantique". Or, avec $\frac{v}{c} \simeq \frac{1}{5}$ pour ce nucléon, il est assez faible ($\frac{\psi_I}{\psi_{II}} = \frac{1}{10}$) pour que ℓ garde cette propriété approximativement.

2°- Pour un système de 2 nucléons, on sait que l'existence du moment électrique quadripolaire du dentéron a conduit à introduire un couplage "dipôle axial" en $(\vec{\sigma}^{(1)} \frac{\vec{x}}{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \frac{\vec{x}}{r}) - \frac{1}{3}\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}$ entre 2 nucléons ($r = |\vec{x}|$ distance des nucléons), et à admettre que l'état fondamental de ^2H est un mélange d'état $^3S_1$ et $^3D_1$ dans la proportion 96 % d'état S et 4 % d'état D (c'est-à-dire que $\psi = c_s \psi_s + c_d \psi_d$ avec : $\frac{|C_D|^2}{|C_S|^2 + |C_D|^2} = \frac{4}{100}$)

On voit que l'état $\ell = 0$ est largement prédominant, et pourtant le couplage spin-orbite (dipôle axial) est fort dans certaines théories (♀) et presque entièrement responsable de l'énergie de liaison du dentéron.

- Les couplages non centraux ont longtemps été une difficulté insurmontable pour les théories mésiques, en raison des divergences qu'ils entraînaient, et l'on n'a encore aucun résultat solide sur cette question.

En résumé, on peut admettre que le couplage Russell-Saunders est une bonne approximation dans certains modèles de structure en couches (Nordheim, Feenberg) ou dans le modèle à particules ∝, mais non pas, dans le modèle de M.G. Mayer en général.

.....

(♀) On pourrait aussi envisager un potentiel central pluri-particulaire pour toute une couche.

(♀) Rarita et Schwinger. P.R. 59, 209, 436 et 556.

Nous le prendrons comme hypothèse de travail, ce qui fera apparaître des cas nouveaux dans les transitions interdites. En abandonnant cette hypothèse que l est un bon nombre quantique, nous devrons retrouver les règles de sélection usuelles.

13 - Le couplage nucléons-leptons.-

La théorie générale montre que la densité de l'Hamiltonien d'intéraction (égale à celle du Lagrangien) doit être un invariant relativiste. En considérant un nucléon placé dans un champ extérieur obéissant aux équations de Dirac(♯), on trouve les 5 formes possibles suivantes :

$$(I)\quad \begin{cases} S = (\psi^*_f \beta \psi_i)\ (\varphi^* \beta \varphi) \\ V = (\psi^*_f\ 1\ \psi_i)\ (\varphi^* \varphi) \quad - (\psi^*_f \vec{\alpha}\ \psi_i)\ (\varphi^* \vec{\alpha} \varphi) \\ T = (\psi^*_f \beta \vec{\sigma} \psi_i)\ (\varphi^* \beta \vec{\sigma} \varphi) \quad + (\psi^*_f \beta \vec{\alpha} \psi_i)\ (\varphi^* \beta \vec{\alpha} \varphi) \\ A = (\psi^*_f \vec{\sigma} \psi_i)\ (\varphi^* \vec{\sigma} \varphi) \quad - (\psi^*_f \gamma_5 \psi_i)\ (\varphi^* \gamma_5 \varphi) \\ P = \qquad\qquad (\psi^*_f \beta \gamma_5 \psi_i)\ (\varphi^* \beta \gamma_5 \varphi) \end{cases}$$

grands petits

$$(\gamma_5 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = i\beta_1)$$

S indique que l'invariant est un produit de 2 scalaires, l'un relatif aux nucléons, $(\psi^*_f \beta \psi_i)$ l'autre aux leptons $(\varphi^* \beta \varphi)$

V qu'il est le produit scalaire de 2 vecteurs (polaires)

A qu'il est le produit contracté de 2 pseudo-vecteurs (c'est-à-dire qu'il est le produit scalaire de 2 vecteurs axiaux)

T qu'il est le produit contracté de 2 tenseurs

P qu'il est le produit de 2 pseudo-scalaires

Dans tous les cas, l'invariant qui peut être un mélange de S.V.T.A.P. est de la forme $(\psi^*_f \Omega_N \psi_i) \times (\varphi^* \Omega_e \varphi)$

Ω_N opérateur portant sur ψ_i du nucléon.

Ω_e même opérateur portant sur φ du lepton.

(♯) complètées par le terme dépendant du moment magnétique anormal indiqué dans le § 22I.

ψ_i fonction d'onde initiale du nucléon.
ψ_f fonction d'onde finale du nucléon.

ψ fonction d'onde de l'électron émis.
φ fonction de l'antineutrino absorbé.

Pour les nucléons, on peut admettre que :

$$\left|\frac{\psi I}{\psi II}\right| \approx \frac{v}{c} \ll I$$

Or, nous avons :

$$\beta = -\rho_3 \qquad \beta\vec{\sigma} = -\rho_3\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (\varphi)$$

$$\vec{\alpha} = +\rho_1\vec{\sigma} \qquad \beta\vec{\alpha} = -\rho_3\rho_1\vec{\sigma}$$

$$\gamma_5 = \rho_1\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i\,\rho_1 \qquad \beta\gamma_5 = -i\,\rho_3\rho_1$$

Si l'on néglige $\frac{v^2}{c^2}$ devant 1, on peut prendre $\rho_3 = 1$ et, d'autre part, les termes contenant ρ_1 sont d'ordre $\frac{v}{c}$ par rapport aux autres, ce qui justifie la classification indiquée en termes grands et petits, chacun étant invariant dans l'espace ordinaire à 3 dimensions.

En effet, les matrices en ρ_3 seul, diagonales, conduisent à des termes en : $(\psi^I) \times \psi^I + (\psi^{II}) \times \psi^{II}$ où $(\psi^I) \times \psi^I \approx \frac{v^2}{c^2} (\psi^{II}) \times \psi^{II}$

Ainsi : $\psi_f^* \rho_3 \psi_i = (\psi_f II) \times \psi_i II - (\psi_f I) \times \psi_i I$ # $(\psi_f II) \times$

Les matrices en ρ_1, diagonales secondaires, conduisent à des termes en $(\psi^I) \times \psi^{II} \approx \frac{v}{c} (\psi^{II}) \times \psi^{II}$

Ainsi : $\psi_f^* \rho_1 \psi_i = (\psi_f II) \times \psi_i I + (\psi_f I) \times \psi_i II$

A l'approximation non Relativiste,

S et V d'une part
T et A de l'autre se confondent.

I3I- Les expressions (I) doivent évidemment être multipliées par une constante g, au moins, déterminant la grandeur du couplage : g Cte de Fermi, qui est déterminée par les valeurs expérimentales des périodes pour les transitions β les plus simples.

(φ) -si $\vec{\sigma}$ désigne la matrice à 4 lignes, 4 colonnes $\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ .....)

on a : $\begin{cases} \sigma_1 = -i\,\alpha_2\alpha_3 \\ \sigma_2 = -i\,\alpha_3\alpha_1 \\ \sigma_3 = -i\,\alpha_1\alpha_2 \end{cases}$

D'autre part, il est souvent commode, et plus exact pour tenir compte des échanges de charge, d'y introduire le formalisme du "spin isotopique" où les 2 états de charge du nucléon sont donnés par la variable de charge

$\tau'_3 = -1$ pour le proton

$\tau'_3 = +1$ pour le neutron (N.F. p.5I,§ 4.22,T.I)

avec les fonctions de charge :

$u_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour le proton; $u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour le neutron

les matrices $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}$ (= Q^* de Bethe)

$\Pi^+ = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (= Q de Bethe)

sont associées respectivement aux transformations.

$n \longrightarrow p + e^-$: $\pi u_+ = u_-$ $\quad \pi u_- = 0$

$p \longrightarrow n + e^+$: $\pi^+ u_- = u_+$ $\quad \pi^+ u_+ = 0$

Les expressions $\psi^*_f \Omega_N \psi_i$ pour chaque nucléon doivent donc être remplacées par :

$\psi^*_f \pi \Omega_N \psi_i$ pour l'émission β^-

$\psi^*_f \pi^+ \Omega_N \psi_i$ pour l'émission β^+ ou la capture K.

D'une manière symétrique, mais purement formelle, on peut considérer électron et neutrino comme 2 états physiques d'une même particule lepton, caractérisés par 2 valeurs d'une variable de charge et masse, avec les matrices :

q échangeant anti-neutrino en e^-

q^+ échangeant neutrino en e^+

On est ramené alors à un problème d'intéraction entre 2 particules (nucléon et lepton) le terme d'intéraction pouvant s'écrire :

$H' = g \pi \Omega_N \psi q \Omega_e \psi$ pour β^-

$H' = g \pi^+ \Omega_N \psi q^+ \Omega_e \psi$ pour β^+

En réalité, dans un noyau, nous avons A nucléons tous couplés entre eux et avec le champ leptonique, de sorte qu'il faut prendre, sauf si l'on admet le modèle à I particule unique, une fonction d'onde pour représenter le noyau dans son ensemble :

$\psi(1, 2, \ldots, A)$ et le terme d'intéraction :

...

$$g \sum_a \pi^{(a)} \Omega_N^{(a)} \psi(1,2,\ldots,a,\ldots,A)\, q\, \Omega_\ell\, \psi(x_a)$$

$\sum_a$ sommation sur tous les nucléons.

Plus précisément , les éléments de matrice, correspondant à une transition sont de la forme :

$$H'_{if} = g \sum_a \int \psi_f^*(1,2,\ldots,A)\, \pi^{(a)} \Omega_N^{(a)}\, \psi_i(1,2,\ldots,A)\, \psi^*(x_a)\, \Omega_\ell\, \varphi(x_a)\, dx_1 \ldots dx_A$$

Dans $\sum_a \int$ se trouve inclus $\sum_{\tau_3' \sigma_3'}$ sur les coordonnées de charge et spin.

Chaque terme de $\sum_a$ correspond à la transformation de l'un des nucléons, $\pi^{(a)}$ (ou $\pi^{+(a)}$) opérant sur la fonction de charge u (a) de ce nucléon.

Dans le cas d'une transition β^- par exemple, seuls les états initiaux neutrons apportent une contribution non nulle à H'_{if} puisque : $\pi^{(a)}$ u - (a) = 0 pour les protons.

$\pi^{(a)}$ u + (a) = u - (a) pour les neutrons,

$u_i = u_+ \longrightarrow u_f$ = u- (u + et u - étant orthogonales par rapport à $\sum_{\tau_3'}$)

I32- Conservation du moment angulaire total.-

Dans l'espace ordinaire, $\Omega_N . \Omega_\ell$ est invariant, comme dans l'espace-temps. Si $\vec{J}$ est le moment angulaire total du système nucléons-champ leptonique, on peut en déduire (§ I2I) :

$(J_z, H') = 0$ $\quad (J^2, H') = 0$

donc aussi :

(I) $(J_z, H) = 0$ (2) $(J^2, H) = 0$

où :

$H = H_n$ (noyau) + H_ℓ (lepton) + H'

Dans ce qui suit, nous prendrons les notations suivantes

	noyau initial	noyau final	électron	neutrino
nb. quantique magnétique	M	M'	m_1	m_2
" " mt. angulaire	J	J'	j_1	j_2
" " mt. orbital	L	L'	ℓ_1	ℓ_2

(I) donne : M + $(-m_2)$ = M' + m_1

nucléon initial anti-ν (♀) nucléon final électron

$$M - M' = m_1 + m_2 \qquad (3)$$

(♀) Voir plus loin § 2I2

.....

En ce qui concerne la conservation de J^2, nous pouvons écrire pour le nombre quantique J

$J = |(J + \Theta_2\, j_2)|$ dans l'état initial

$J = |(J' + \Theta_1\, j_1)|$ " " final

Θ_2 pouvant prendre toutes les valeurs : $-j_2, \frac{-j_2+1}{j_2}, \ldots, \frac{j_2-1}{j_2}, \frac{j_2}{j_2}$

Θ_1 " " " " " $-j_1, \frac{-j_1+1}{j_1}, \ldots, \frac{j_1-1}{j_1}, \frac{j_1}{j_1}$

$-1 \leq \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \leq 1$ (4) du § I2I)

$$|(J + \Theta_2 j_2)| = |(J' + \Theta_1 j_1)| \longrightarrow \underline{J \pm J' = \Theta_1 j_1 + \Theta_2 j_2} \quad (4)$$

soit $\Delta J = |(J - J')|$ D'après (4) on a toujours :

$\Delta J \leq |(\Theta_1 j_1 + \Theta_2 j_2)| \leq j_1 + j_2 = k$ (et $J + J' \geq |(j_1 - j_2)|$)

$$\underline{\Delta J \leq j_1 + j_2 = k} \quad (5)$$

I33- Probabilité de transition-Principe du développement.-

D'après la théorie des perturbations :

$P = \frac{2\pi}{\hbar} |(H'_{if})|^2 \rho$, ρ est la probabilité de transition par unité de temps.

(ρ poids statistique de l'état final est égal à 1 si les fonctions d'onde sont normées en énergie).

D'où, si le champ leptonique est caractérisé par $j_1 l_1 m_1$: $j_2 l_2 m_2$ et dans un système d'unités où $\hbar = 1$:

$$P_{\substack{j_1 l_1 m_1 \\ j_2 l_2 m_2}} = 2\pi g^2 \left| \sum_a \int \psi_f^* \pi^{(a)} \Omega_N^{(a)} \psi_i \cdot \varphi^*(x_a) \Omega_\ell \varphi(x_a)\, dx_1 \ldots dx_A \right|^2$$

A cause de la dégénérescence en M, il faut prendre

$\frac{I}{2J+I} \sum_{MM'}$ - En considérant d'autre part les différents états du champ leptonique.

$$P = \frac{2\pi g^2}{2J+1} \sum_{MM'} \sum_{\substack{j_1 l_1 m_1 \\ j_2 l_2 m_2}} \left| \sum_a \int \psi_f^* \pi^{(a)} \Omega_N^{(a)} \psi_i \cdot \varphi^*(x_a) \Omega_\ell \varphi(x_a)\, dx_1 \ldots dx_A \right|^2$$

les valeurs de m_1 m_2 MM' étant liées par $m_1 + m_2 = M - M'$.

Nous admettrons que, dans toute l'étendue du noyau, ψ, φ ont les mêmes valeurs qu'à la surface, ce qui nous permettra de sortir de $\int_{\text{noyau}}$ les facteurs radiaux f (R), g(R).

Quand $j_1 \longrightarrow j_1+1$, f,g, de l'électron sont multi-

.....

pliés par : $\begin{cases} pR \simeq (\varepsilon_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}} R & \text{en moyenne pour l'émission } \beta \\ \alpha Z R = \dfrac{R}{a} & \text{pour la capture K} \end{cases}$

Quand $j_2 \longrightarrow j_2 + 1$, f, g, du ν sont multipliés par $qR \simeq (\varepsilon_0 - 1) R, < (\varepsilon_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}} R$

De sorte que, en prenant j_1 j_2 par termes $j_1 + j_2 = K$ croissants, nous obtenons un développement de P par puissances croissantes de $\left(\varepsilon_0^2 - 1\right) R^2 \ll 1$.

Pratiquement, nous prendrons seulement le premier terme non nul de ce développement et nous sommes ainsi conduits à différents ordres d'interdiction suivant que $\int$, portant sur les facteurs angulaires de ψ, ψ et sur ψ_f, ψ_i, est nullé ou non pour $k = 1$, $k = 2$, etc...

Malheureusement, ce schéma simple se trouve compliqué
1°/ Par l'existence des solutions des deux types a, b, pour une même valeur de j, c'est-à-dire par l'existence de deux valeurs $l = j \pm \frac{1}{2}$,
2°/ A priori, il faut prendre :

$H' \equiv (c_S S + c_V V + c_T T + c_A A + c_P P)$

avec $c_S^2 + c_V^2 + c_T^2 + c_A^2 + c_P^2) = 1$ par exemple la grandeur du couplage étant, de plus, déterminée par g.

Ceci complique la discussion par l'existence de plusieurs termes d'ordres de grandeur différents.

Dans les transitions <u>permises</u>, on peut négliger les termes en $\frac{v}{c}$ (+).

Alors : $\Omega^c = c_S \beta + c_V 1 + c_T \beta \vec{\sigma} + c_A \vec{\sigma}$

$c_T = c_A = 0$ conduirait à <u>$j = 0$</u>, Ω étant un scalaire

$c_S = c_V = 0$ " <u>$J = 0,1$</u> (++) Ω étant un pseudo-vecteur dans l'espace ordinaire

L'existence de nombreuses transitions permises avec $\Delta J = 1$ conduit à : $c_T, c_A > c_S$, c_V [15] (+++)

(+) Sauf dans le cas d'une intéraction P pure qui est exclu par le raisonnement qui suit, Ω étant alors scalaire.

(++) Voir le § 23 suivant

(+++) Voir le § 6 suivant

D'autre part, certains mélanges doivent être exclus parce qu'ils introduisent un terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ dans l'expression $P_1(\varepsilon)\,d\varepsilon$ de la distribution en énergie pour les spectres permis, ce qui est contraire à l'expérience [16] Cette limitation se traduit par $C_S C_V = 0$ et $C_T C_A = 0$ -

Une seule des 2 intéractions T, ou A, est donc prédominante.

La combinaison linéaire S-A-P proposée par Critchfield et Wigner [17] satisfait à ces conditions ($c_V = c_T = 0$)

Cette intéraction fait jouer un rôle identique aux 4 particules de spin $\frac{1}{2}$ qui interviennent dans le processus : neutron, proton, électron, neutrino. Si l'on admet que neutron et proton obéissent aux équations de Dirac, comme nous l'avons fait, cet Hamiltonien est antisymétrique par rapport à 2 quelconques des 4 particules (ou antiparticules) créées.

De Groot et Tolhock [16] ont proposé des combinaisons plus générales : 1) de S, A, P

ou2) de V et T ($c_s = c_a = 0$)

qui satisfont au principe de symétrie complète entre les process β^+ et β^-. Nous supposerons pour simplifier $c_s = c_v = 0$ et $c_p = 0$. Si la première condition est effectivement réalisée, on ne doit pas observer de transition $J = 0 \longrightarrow J' = 0$: Ω se réduit alors à un opérateur $\vec{\sigma}$ vectoriel qui ne peut réaliser cette transition. On n'en a jamais observé, mais, en fait, il n'est guère possible d'en observer de toute façon (dans l'état fondamental J = 0 seulement pour les noyaux de N et Z pairs, condition qui ne peut être remplie pour les noyaux uinitial et final).

Nous avons ainsi à considérer :

soit l'intéraction : T : $\Omega = \beta\vec{\sigma} + \beta\vec{\alpha}$

soit l'intéraction : A : $\Omega = \vec{\sigma} - \gamma_5$

qui se confondent pratiquement pour les transitions permises et conduisent à la règle de sélection de Gamow-Teller ($\Delta J = 0$ ou I) pour ces transitions.

Nous ne ferons les calculs complets que pour ces deux formes d'intéraction.

CLASSIFICATION DES TRANSITIONS INTERDITES . (Intéraction Tensorielle).

2I- Cas du couplage Russell-Saunders.-

L et L' sont de bons nombres quantiques ou correspondent au moins à des composantes largement prédominantes

ψ_i, ψ_f peuvent alors se mettre au moins approximativement sous la forme : $\psi = \sum(\sigma)\,\Phi(x_1, \ldots x_A)$

ou en introduisant des fonctions de charge (τ)

$\psi = (\tau)\sum(\sigma)\,\Phi(x_1, \ldots, x_A)$

D'une manière plus précise, on a (pour L > S) :

$J = L + S - \lambda$ λ ayant une des valeurs entières $0 \leq \lambda \leq 2S$

$$\psi^M_{JL} = (\tau)\,\rho(J,L,S)\sum_{S_z + M_\ell = M} C^J_{S_z M_\ell}\, {}^{2S+1}(\sigma)_{S_z}\, \Phi^{M_\ell}_L(x_1 \ldots x_A) \qquad (1)$$

M_ℓ composante sur O_z du moment orbital - S_z composante sur O_z du spin.

les $C^J_{S_z M_\ell}$ coëfficients de la série de Cleboch-Gordan(App.I).

$\rho(J,L,S)$ facteur de normalisation.

Les Φ_L^M dépendent tous du même facteur radial f $(r_1 \ldots r$ qui peut être mis en facteur, mais sont des fonctions différentes des variables angulaires $u, \ldots u_A$, analogues aux Y_ℓ^M pour une seule variable.

Les ${}^{2S+1}(\sigma)_{S_z}$ sont les fonctions de spin.

Ainsi, pour $S = \frac{1}{2}$: ${}^2(\sigma)_{-\frac{1}{2}} = v_-$ et ${}^2(\sigma)_{1/2} = v_+$

du § I23, et si l'on a un seul nucléon dans un champ central, on retrouve les formules (5) de ce §.

$$\psi^M_{L,J=L+\frac{1}{2}} = \frac{(\tau)}{\sqrt{2L+1}}\left[\sqrt{L-M_\ell+1}\;{}^2(\sigma)_{-\frac{1}{2}}\, Y_L^{M+\frac{1}{2}} + \sqrt{L+M_\ell+1}\;{}^2(\sigma)_{\frac{1}{2}}\, Y_L^{M-\frac{1}{2}}\right] g_L$$

$$\psi_{L,J=L-\frac{1}{2}} = \frac{(\tau)}{\sqrt{2L+1}}\left[\sqrt{L+M_\ell}\;{}^2(\sigma)_{-\frac{1}{2}}\, Y_L^{M+\frac{1}{2}} - \sqrt{L-M_\ell}\; Y_L^{M-\frac{1}{2}}\right] f_{-L-1} \qquad (1)'$$

Pour un système de 2 nucléons dans un état triplet de spin (S = 1) les fonctions de spin sont :

$$\begin{cases} {}^3(\sigma)_{-1} = v_-(1)\, v_-(2) \\ {}^3(\sigma)_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v_+(1)\, v_-(2) + v_-(1)\, v_+(2)\right] \\ {}^3(\sigma)_1 = v_+(1)\, v_+(2) \end{cases}$$

.....

et en introduisant les coordonnées relatives $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$, on a les fonctions angulaires :

$$ {}^3Z^M_{J=L} = \frac{1}{\sqrt{2L(2L+1)}} \left[\sqrt{2}\, M\, {}^3(\sigma)_1\, Y_L^M - \sqrt{(L+M)(L-M+1)}\, {}^3(\sigma)_1\, Y_L^{M-1} + \sqrt{(L-M)(L+M+1)}\, Y_L^{M+1} \right] $$

etc... pour L = J-1, L = J + 1-

- Rosenfeld (N.F. T.II-p.377-389) a traité suivant cette méthode le cas des transitions permises, où le terme $\beta\vec{\sigma}$ intervient seul. Il prend pour opérateur : $\frac{1}{\sqrt{3}}\tau_1\vec{\sigma}$ au lieu de $\pi\vec{\sigma}$ ou $\pi^+\vec{\sigma}$

Comme $\tau_1 = \pi_1\pi^+$ il doit séparer dans les résultats les contributions des transitions β^+ et β^-

2II- Mais, pour les transitions interdites, il faut tenir compte du terme $\int\beta\vec{\alpha}$ qui n'a pas de signification directe avec la représentation (1) : $\beta\vec{\alpha} = -\beta_3\rho_1\vec{\sigma} = -i\rho_2\vec{\sigma}$ et il faudrait introduire les matrices (ρ) indiquant les 2 possibilités de masse propre $+M_o$ et $-M_o$ pour chaque nucléon (c'est-à-dire revenir aux 4 composantes de Dirac dans le cas d'un seul nucléon, le couplage Russell-Saunders étant seulement approché).

Dans ce dernier cas, on peut remplacer $\int\beta\vec{\alpha}_N$ # $-\int\vec{\alpha}_N$ par $\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\vec{X}$, en utilisant la relation bien connue

$$ (i\,|\,\vec{\alpha}_N\,|\,f) = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(i\,|\,\vec{X}\,|\,f) \qquad (2) $$

où : $-c\,\vec{\alpha}_N$ apparaît comme une matrice de vitesse pour le nucléon.

En convenant alors de remplacer, dans tous les cas, $\int\beta\vec{\alpha}_N$ par $+\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\vec{X}$, on obtient les règles de sélection correspondant, à cet élément de matière, et son ordre de grandeur. C'est le procédé de Konopinski.

Comme $\int\beta\vec{\alpha}$ renferme aussi un facteur leptonique établissons (2) dans ce cas plus général; dans (i | $\vec{X}$ | f), nous supposons que Ψ_i et Ψ_f du nucléon sont les fonctions d'onde de Heisenberg contenant le facteur $e^{-\frac{i}{\hbar}W_n t}$, tandis que ψ et φ sont celles de Schrödinger, indépendantes de t

X désigne les coordonnées du nucléon

x " " " du lepton

...

Dans tout ce qui suit nous désignons par $\bar{a}$ la quantité conjuguée de a, au lieu de $a^{\dagger}$, pour alléger les notations.

$$\frac{d}{dt}(f|\vec{X}|i) = \frac{d}{dt}\int \overline{\Psi}_f \cdot (X)\, \vec{X}\, \Psi_i(X).\, \overline{\varphi}(x)\, \beta\, \vec{\alpha}\, \varphi(x)\, \delta(X-x)\, dX\, dx \qquad (3)$$

$$= \int \left(\frac{\partial \overline{\Psi}_f}{\partial t}\vec{X}\Psi_i + \overline{\Psi}_f \vec{X}\frac{\partial \Psi_i}{\partial t}\right)\overline{\varphi}\,\beta\vec{\alpha}\,\varphi \cdot \delta(X-x)\, dX\, dx$$

Ψ_i et Ψ_f vérifiant : $H\Psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ (H du nucléon)

d'où :

$$\frac{d}{dt}(f|\vec{X}|i) = \frac{i}{\hbar}\int\left(\overline{H\Psi_f}\,\vec{X}\,\Psi_i - \overline{\Psi}_f \vec{X}\, H\Psi_i\right)\overline{\varphi}\,\beta\vec{\alpha}\,\varphi\,\delta(X-x)\,dX\,dx \qquad (4)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\int \overline{\Psi}_f [H, \vec{X}]\,\Psi_i \cdot \overline{\varphi}\,\beta\vec{\alpha}\,\varphi\,\delta(X-x)\,dX\,dx$$

Or : $H = -c(\vec{\alpha}\vec{p} - \beta mc) + V(X)$ d'où : $[H, \vec{X}] = -c\vec{\alpha}\frac{\hbar}{i}$

Donc : $\frac{d}{dt}(f|\vec{X}|i) = -c\int \overline{\Psi}_f \vec{\alpha}_N \Psi_i \cdot \overline{\varphi}\,\beta\vec{\alpha}\,\varphi\,\delta(X-x)\,dX\,dx$

$= -c(f|\vec{\alpha}_N|i)$

Ce calcul donne l'ordre de grandeur de $(f|\vec{\alpha}_N|i)$ puisque :

$$\frac{\partial \overline{\Psi}_f}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}W_f\overline{\Psi}_f \qquad \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}W_i\Psi_i \qquad \text{d'où :}$$

$$\frac{d}{dt}(f|\vec{X}|i) = \frac{i}{\hbar}(W_f - W_i)\int \overline{\Psi}_f \vec{X}\,\Psi_i \cdot \overline{\varphi}\,\beta\vec{\alpha}\,\varphi\,\delta(X-x)\,dX\,dx$$

$$= \frac{i}{\hbar}(W_f - W_i)R\int \overline{\Psi}_f \frac{\vec{X}}{r}\Psi_i\,\overline{\varphi}\,\beta\vec{\alpha}\,\varphi\,\delta(X-x)\,dX\,dx$$

$$(f|\vec{\alpha}_N|i) = \frac{i}{\hbar c}(W_i - W_f)R\left(f\left|\frac{\vec{X}}{r}\right|i\right)$$

$\vec{X}$ fonction angulaire s'exprimant à l'aide des Y_l de Laplace

R rayon du noyau

$W_i - W_f$ est l'énergie cédée par le nucléon $= \varepsilon_0 m_0 c^2$

$$(f|\vec{\alpha}|i) = i\frac{m_0 c}{\hbar}\varepsilon_0 R\left(f\left|\frac{\vec{X}}{r}\right|i\right) = \underline{i(\varepsilon R)\left(f\left|\frac{\vec{X}}{r}\right|i\right)}$$

si R est évalué en $\frac{\hbar}{m_0 c}$

$\left(f\left|\frac{\vec{X}}{r}\right|i\right)$ et $(f|\beta\vec{\sigma}_N|i)$ étant du même ordre

...

le terme $\int \beta \vec{\alpha}$ est d'ordre $\varepsilon R \ll 1$ par rapport au terme $\int \beta \vec{\sigma}$

Ce résultat a été très utilisé depuis l'article [I5] de Konopinski. Cependant, tout le calcul suppose que H est le même dans les états initial et final du nucléon; on y néglige donc la variation d'énergie Coulombienne au cours de la transition.

On peut essayer d'en tenir compte en supposant toujours qu'un seul nucléon placé dans le champ des A-1 autres subit la transition. Alors il faut prendre $H_f = H_i + V$ V variation d'énergie Coulombienne.

$$\frac{d}{dt}(f|\vec{X}|i) = \frac{i}{\hbar}\int \overline{\psi_f}\,[H_i, \vec{X}]\,\psi_i + \frac{i}{\hbar}\int V\,\overline{\psi_f}\,\vec{X}\,\psi_i$$

en n'écrivant ici que les facteurs nucléoniques

ψ_i et ψ_f vérifiant : $H_i\psi_i = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi_i}{\partial t}$, $H_f\psi_f = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi_f}{\partial t}$ ne sont pas orthogonales,

mais le passage de (3) à (4) ne nécessite pas cette hypothèse.

Par suite :

$$(f|\vec{\alpha}_N|i) = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(f|\vec{X}|i) + \frac{i}{\hbar c}\int V\overline{\psi_f}\,\vec{X}\,\psi_i$$

Nous avions estimé [I9] le 2ème terme en remplaçant V par une valeur moyenne, calculée avec une répartition uniforme des charges dans le noyau, et obtenu

C = $\varepsilon_0 R + 1{,}2\,\alpha\,(Z-1)$ pour une transition $\beta -$

C = $\varepsilon_0 R - 1{,}2\,\alpha\,Z$ " " " $\beta +$

C étant le rapport des valeurs absolus de $(f\,|\vec{\alpha}_N|\,i)$ à $(f\,|\frac{\vec{X}}{\hbar}|\,i)$, ou $(f\,|\beta\vec{\sigma}|\,i)$ sensiblement.

Z correspond au noyau final, comme dans tout ce qui suit.

Mais, les approximations faites sont très grossières. Si l'on supposait les charges réparties uniformément à la surface du noyau, il faudrait remplacer le facteur $\frac{6}{5}$ par $\frac{1}{2}$:

C = $R + 0{,}5\,(Z-1)$ pour $\beta -$

C = $R - 0{,}5\,Z$ pour $\beta +$

En fait, comme nous l'avons indiqué au § 13, $\int \beta\vec{\alpha}$, $\int \vec{\alpha}$ sont d'ordre ν par rapport à $\int \beta\vec{\sigma}$, $\int \vec{\sigma}$ comme tous les éléments de matrice contenant ρ_1 ou ρ_2 par rapport à ceux qui contiennent ρ_3 ou 1; et les charges dans le noyau doivent se réarranger après la transition de telle sorte que cette relation reste vérifiée.

...

C'est pourquoi Greuling I8 prend C^2 ajusté, d'après l'expérience pour chaque transition, dans l'intervalle $(\varepsilon R)^2$ à $\frac{1}{10}$ Nous verrons, avec plus de précision (App. II que l'on doit avoir $C \simeq \frac{v}{c}$ ou $\frac{v'}{c}$ (v' pour le noyau final). $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{10} \longrightarrow \frac{v}{c} = 0{,}315$, valeur grande d'après ce que nous avons vu au § I23

$\lambda \simeq \lambda_c \longrightarrow \frac{v}{c} \simeq 0{,}2 \longrightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 \simeq 4 \times 10^{-2}$

$\frac{1}{2} M v^2 \simeq 13\ MeV \longrightarrow \frac{v}{c} \simeq 0{,}17 \longrightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 \simeq 3{,}8 \times 10^{-2}$

Nous pouvons donc considérer que $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \simeq 3$ à 4×10^{-2}
Des fluctuations sont évidemment possibles suivant le noyau considéré.

Il faut remarquer que $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ est, en général, plus grand que $\left(\varepsilon_0^2 - 1\right) R^2$ et même que $\varepsilon_0^2 R^2$

Pour les spectres mous on a même :

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \gg \left(\varepsilon_0^2 - 1\right) R^2$$

Ainsi pour une valeur moyenne $E_0 = 2\ MeV \longrightarrow \varepsilon_0 \# 5$ et un noyau moyen $A = 100$, comme $R = 3{,}8 \times 10^{-3} A^{1/3}$ en $\frac{\hbar}{mc}$

$\left(\varepsilon_0^2 - 1\right) R^2 \simeq 3{,}45 \times 10^{-4} \times 100^{\frac{2}{3}} = 7{,}42 \times 10^{-3} < \left(\frac{v}{c}\right)^2$

$\varepsilon_0^2 R^2 = 3{,}6 \times 10^{-4} \times 100^{2/3} < \left(\frac{v}{c}\right)^2$

La quantité $\frac{\alpha Z}{2}$ qui intervient dans l'expression de la variation d'énergie Coulombienne, sera importante par la suite. Elle croît régulièrement avec Z et pour $A = 100$, $Z \simeq 47$ est du même ordre que $\frac{v}{c}$

En gros : $\frac{\alpha Z}{2} < \frac{v}{c}$ pour $A < 100$

$\frac{\alpha Z}{2} > \frac{v}{c}$ — $A > 100$

(v doit être un peu plus grand pour les noyaux les plus lourds l'énergie de séparation d'un neutron diminuant, tandis que l'énergie potentielle moyenne reste sensiblement la même : $\frac{v^2}{c^2} \simeq 5$ à 6×10^{-2})

Pour les règles de sélection, il sera commode de considérer $\int \frac{\vec{X}}{r}$ au lieu de $\int \beta \vec{\alpha}_N$

...

212 - Facteurs leptoniques (émission β).-

φ y est la fonction d'onde d'un anti-neutrino, qui s'obtient à partir de φ_- d'un ν à énergie négative par :

$$\varphi = C\,\overline{\varphi_-} \qquad \text{où} \quad C = \beta\alpha_2 = -\rho_3\rho_1\sigma_2$$

$$\alpha_2\,\overline{\varphi_-} = i\begin{pmatrix} -\overline{\varphi_4^-} \\ \overline{\varphi_3^-} \\ -\overline{\varphi_2^-} \\ \overline{\varphi_1^-} \end{pmatrix} \qquad \beta\alpha_2\,\overline{\varphi_-} = i\begin{pmatrix} -\overline{\varphi_4^-} \\ \overline{\varphi_3^-} \\ \overline{\varphi_2^-} \\ -\overline{\varphi_1^-} \end{pmatrix}$$

En prenant pour φ_- une solution type (ℓ) : $j = \ell - \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \varphi_1^- = i\left(\dfrac{j+m}{2j}\right)^{\frac12} Y_{j-\frac12}^{m-\frac12}\, f_{-\ell-1}(r)\, e^{\frac{i}{\hbar}Wt} \\ \varphi_2^- = i\left(\dfrac{j-m}{2j}\right)^{\frac12} Y_{j-\frac12}^{m-\frac12}\, f_{-\ell-1}(r) \quad — \\ \varphi_3^- = \left(\dfrac{j-m+1}{2j+2}\right)^{\frac12} Y_{j+\frac12}^{m-\frac12}\, g_{-\ell-1}(r) \quad — \\ \varphi_4^- = -\left(\dfrac{j+m+1}{2j+2}\right)^{\frac12} Y_{j+\frac12}^{m+\frac12}\, g_{-\ell-1}(r) \quad — \end{cases} \qquad \text{à énergie } -W < 0$$

$$\begin{cases} \overline{\varphi_1^-} = -i(-1)^{m-\frac12}\left(\dfrac{j+m}{2j}\right)^{\frac12} Y_{j-\frac12}^{-m+\frac12}\, f_{-\ell-1}(r)\, e^{-\frac{i}{\hbar}Wt} \\ \overline{\varphi_2^-} = -i(-1)^{m+\frac12}\left(\dfrac{j-m}{2j}\right)^{\frac12} Y_{j-\frac12}^{-m-\frac12}\, f_{-\ell-1}(r) \quad — \\ \overline{\varphi_3^-} = (-1)^{m-\frac12}\left(\dfrac{j-m+1}{2j+2}\right)^{\frac12} Y_{j+\frac12}^{-m+\frac12}\, g_{-\ell-1}(r) \quad — \\ \overline{\varphi_4^-} = -(-1)^{m+\frac12}\left(\dfrac{j+m+1}{2j+2}\right)^{\frac12} Y_{j+\frac12}^{-m-\frac12}\, g_{-\ell-1}(r) \quad — \end{cases} \qquad \text{(les } f \text{ et } g \text{ réels)}$$

D'où pour φ après division par $(-1)^{m+\frac12}$:

$$\begin{cases} \varphi_1 = i\left(\dfrac{j+m+1}{2j+2}\right)^{\frac12} Y_{j+\frac12}^{-m-\frac12}\, g_{-\ell-1}(r)\, e^{-\frac{i}{\hbar}Wt} \\ \varphi_2 = -i\left(\dfrac{j-m+1}{2j+2}\right)^{\frac12} Y_{j+\frac12}^{-m-\frac12}\, g_{-\ell-1}(r) \quad — \\ \varphi_3 = \left(\dfrac{j-m}{2j}\right)^{\frac12} Y_{j-\frac12}^{-m-\frac12}\, f_{-\ell-1}(r) \quad — \\ \varphi_4 = \left(\dfrac{j+m}{2j}\right)^{\frac12} Y_{j-\frac12}^{-m+\frac12}\, f_{-\ell-1}(r) \quad — \end{cases}$$

...

solution de type (a) avec $j = l' + \frac{1}{2}$ ($l' = l-1$) et le nombre quantique magnétique - m ce ——— qui indique la relation entre le neutrino et l'anti-neutrino.

1°- Calcul de $\vec{A} = \overline{\psi}\beta\vec{\sigma}\psi$

$$\vec{A} = \overline{\psi}\beta\vec{\sigma}C\overline{\psi}_- = -(\overline{\psi C\beta\vec{\sigma}\psi_-})$$

comme on le vérifie

$$\begin{cases} A_x = (\overline{\psi C\beta\sigma_x\psi}) = -i(\overline{-\psi_1\psi_3 + \psi_2\psi_4 - \psi_3\psi_1 + \psi_4\psi_2}) \\ A_y = (\overline{\psi C\beta\sigma_y\psi}) = \overline{(\psi_1\psi_3 + \psi_2\psi_4 + \psi_3\psi_1 + \psi_4\psi_2)} \\ A_z = (\overline{\psi C\beta\sigma_z\psi}) = -i(\overline{\psi_1\psi_4 + \psi_2\psi_3 + \psi_3\psi_2 + \psi_4\psi_1}) \end{cases}$$

(l'indice-de - étant supprimé)

Comme pour les spectres atomiques, il est avantageux d'introduire :

$$\begin{cases} A_x + iA_y = 2i(\overline{\psi_1\psi_3 + \psi_3\psi_1}) \\ A_x - iA_y = -2i(\overline{\psi_2\psi_4 + \psi_4\psi_2}) \\ A_z = -i(\overline{\psi_1\psi_4 + \psi_2\psi_3 + \psi_3\psi_2 + \psi_4\psi_1}) \end{cases}$$

Calculons ces expressions dans les différents cas, en séparant les termes les plus grands : ceux où q^r a la plus petite puissance, donc les termes en Y ($j_2 - \frac{1}{2}$) du neutrino auxquels nous réservons la notation $\vec{A}$; $\vec{a}$ sera associé aux termes en Y ($j_2 + \frac{1}{2}$).

Pour simplifier les notations, nous poserons :

$j_1 - \frac{1}{2} = r$ $\qquad$ $j_2 - \frac{1}{2} = s$

$m_1 - \frac{1}{2} = t$ $\qquad$ $m_2 - \frac{1}{2} = v$

a) ψ et φ de type différent : $j_1 = l_1 + \frac{1}{2}$; $j_2 = l_2 - \frac{1}{2}$ ou l'inverse

$j_1 + j_2 = l_1 + l_2$

$$(1)\quad \begin{cases} A_x + iA_y = 2\left(\frac{j_1+m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2+m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{Y_r^t\,Y_s^v}\,(g_r f_{-s-2} \text{ ou } f_{-r-2} g_s) \\ A_x - iA_y = -2\left(\frac{j_1-m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2-m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{Y_r^{t+1}\,Y_s^{v+1}}\,(\text{——— id ———}) \\ A_z = -\left[\left(\frac{j_1+m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2-m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{Y_r^t\,Y_s^{v+1}} + \left(\frac{j_1-m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2+m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{Y_r^{t+1}\,Y_s^v}\right] \times \\ \qquad \times (g_r f_{-s-2} \text{ ou } f_{-r-2} g_s) \end{cases}$$

...

Les produits $Y_r Y_s$ peuvent se transformer en somme :

$Y_r^{\mu_1} \quad Y_s^{\mu_2} = a_0 Y_{r+s}^{\mu_1+\mu_2} + a_2 Y_{r+s-2}^{\mu_1+\mu_2} + \dots + a_{2s} Y_{r-s}^{\mu_1+\mu_2}$ (pour r s)

toutes les fonctions ayant la parité de :

$r + s = j_1+j_2-1 = k-1$

Ceci résulte de la règle (4 - § I2I) et de la conservation de la parité, et peut se démontrer aussi directement

$$(2)\quad \begin{cases} a_x + i a_y = -2 \left(\frac{j_1 - m_1 + 1}{2j_1+2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{j_2 - m_2 + 1}{2j_2+2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y_{r+1}^{t} \; Y_{s+1}^{v}} \; (f_r g_{s-2} \text{ ou } g_{r-2} f_s) \\ a_x - i a_y = 2 \left(\frac{j_1 + m_1 + 1}{2j_1+2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{j_2 + m_2 + 1}{2j_2+2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y_{r+1}^{t+1} \; Y_{s+1}^{v-1}} \; (\text{ --- id --- }) \\ a_z = -\left[\left(\frac{j_1 - m_1 + 1}{2j_1+2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{j_2 + m_2 + 1}{2j_2+2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y_{r+1}^{t} \; Y_{s+1}^{v+1}} + \left(\frac{j_1 + m_1 + 1}{2j_1+2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{j_2 - m_2 + 1}{2j_2+2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y_{r+1}^{t+1} \; Y_{s+1}^{v}}\right] \times \\ \qquad \times (f_r g_{s-2} \text{ ou } g_{r-2} f_s) \end{cases}$$

Ici, en n'écrivant pas les coefficients, ni les indices supérieurs :

$Y_{r+1} \; Y_{s+1} = Y_{r+s+2} + Y_{r+s} + \dots\dots\dots + Y_{r-s}$

Soit : $E_{j_1 \; m_1 \; / \; j_2 m_2} = g \int \overline{\Psi_f} \; \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{A} \; \Psi_i$

$F_{j_1 \cdot m_1 \; / \; j_2 m_2} = g \int \overline{\Psi_f} \; \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \; \Psi_i$

Si ces termes étaient seuls, il leur correspondrait des probabilités de transition partielles :

$P_{j_1 m_1, j_2 m_2} = |E|^2 \qquad Q_{j_1 m_1, j_2 m_2} = |F|^2$

Les facteurs radiaux leptoniques, pris à la surface du noyau, en déterminant l'ordre de grandeur :

$P_{j_1 m_1, j_2 m_2} \sim g_r^2 f_{s-2}^2 + f_{r-2}^2 g_s^2$

$Q_{j_1 m_1, j_2 m_2} \sim f_r^2 g_{s-2}^2 + g_{r-2}^2 f_s^2$

en considérant les 2 possibilités inverses.

Pour le neutrino, nous avons :

$$f_{s-2}^2 = \frac{q}{2R}\left[J_{s-\frac{1}{2}}(qR)\right]^2 = \frac{q}{2R}\left[J_{j_2}(qR)\right]^2$$

$$g_s^2 = \frac{q}{2R}\left[J_{s+\frac{1}{2}}(qR)\right]^2 = \frac{q}{2R}\left[J_{j_2}(qR)\right]^2$$

$$f_{s-2}^2 = g_s^2 \# \frac{q}{2R}\frac{2}{\pi}\left[\frac{(qR)^{j_2}}{1\times 3\times \dots \times 2j_2}\right]^2 = \frac{q^2}{\pi}\frac{(qR)^{2s}}{\left[1\times 3\times \dots \times (2s+1)\right]^2} \qquad (3)$$

...

et de même :

$$g_{-s-2} = \frac{q}{2R}\left[J_{j_2+\frac{1}{2}}(qR)\right]^2 = \frac{q}{2R}\left[J_{j_2+1}(qR)\right]^2$$

$$f_s^2 = \frac{q}{2R}\left[J_{l_2+\frac{3}{2}}(qR)\right]^2 = \quad \text{—— d° ——}$$

$$(4)\quad f_s^2 = g^2_{-s-2} \# \frac{q}{2R} : \frac{q}{\pi}\,\frac{(qR)^{j_2+1}\,\ldots}{[1\times 3\times\ldots\times(2j_2+2)]^2} = \frac{q^2}{\pi}\,\frac{(qR)^{2s+2}}{[1\times 3\times\ldots\times(2s+3)]^2} \qquad (4)$$

de sorte que :

$$P_{j_1 m_1, j_2 m_2} \sim \frac{q^2}{\pi}\,\frac{(qR)^{2s}}{[1\times 3\times\ldots\times(2s+1)]^2}\,(g_r^2 + f^2_{-r-2}) \qquad (5)$$

$$Q_{j_1 m_1, j_2 m_2} \sim \frac{q^2}{\pi}\,\frac{(qR)^{2s+2}}{[1\times 3\times\ldots\times(2s+3)]^2}\,(f_r^2 + g^2_{-r-2}) \qquad (6)$$

Les calculs de $g_r^2+f^2_{-r-2}$, etc...relatifs à l'électron sont faits dans l'appendice II.

On trouve : $f_r^2+g^2_{-r-2} \sim \frac{\alpha^2 Z^2}{(2j_1+1)^2}\,(g_r^2+f^2_{-r-2})$ (7)

pour l'émission β

où $\frac{\alpha 2}{2j_1+1} \leq \frac{\alpha 2}{2} = \frac{2}{274} \leq \frac{1}{3}$

On a donc : $Q_{j_1 m_1, j_2 m_2} \sim (\varepsilon_0 - 1)^2 R^2 \left(\frac{\alpha 2}{2}\right)^2 \cdot P_{j_1 m_1\, j_2 m_2}$

$Q \ll P$

P correspond d'ailleurs à $Y_{k-1}{}^{+}\ldots\ldots$

Q " " à $Y_{k+1}{}^{+}\ldots\ldots$

b) <u>ψ et φ de même type</u> : $j_1 = \begin{cases} l_1+\frac{1}{2} \\ l_1-\frac{1}{2} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} l_2+\frac{1}{2} \\ l_2-\frac{1}{2} \end{matrix} \Big\} = j_2$

<u>$j_1+j_2 = l_1+l_2 \pm 1$</u>

$$(8)\quad \begin{cases} A_x + iA_y = -2\left(\frac{j_1-m_1+1}{2j_1+2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2+m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{Y^t_{r+1}\,Y^v_s}\,(f_r g_s \text{ ou } g_{-r-2} f_{-s-2}) \\ A_x - iA_y = 2\left(\frac{j_1+m_1+1}{2j_1+2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2-m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{Y^{t+1}_{r+1}\,Y^{v+1}_s}\,(\text{—— id ——}) \\ A_z = -\left[\left(\frac{j_1-m_1+1}{2j_1+2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2-m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{Y^t_{r+1}\,Y^{v+1}_s} - \left(\frac{j_1+m_1+1}{2j_1+2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2+m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{Y^{t+1}_{r+1}\,Y^v_s}\right] \times \\ \qquad \times (f_r g_s \text{ ou } g_{-r-2} f_{-s-2}) \end{cases}$$

...

$$Y_{r+1}\, Y_s = Y_{r+s+1} + Y_{r+s-1} + \cdots\cdots + Y_{|r-s+1|}$$

$$= Y_k \quad + Y_{k-2} + \cdots\cdots$$

$$(9)\quad \begin{cases} a_x + i a_y = -2\left(\frac{j_1+m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2-m_2+1}{2j_2+2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y_r^t\, Y_{s+1}^{\nu}} \quad (g_r f_s \text{ ou } f_{-r-2}\, g_{-s-2}) \\ a_x - i a_y = 2\left(\frac{j_1-m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2+m_2+1}{2j_2+2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y_r^{t+1}\, Y_{s+1}^{\nu}} \quad (\text{---- id ----}) \\ a_z = \left[\left(\frac{j_1+m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2+m_2+1}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y_r^t\, Y_{s+1}^{\nu+1}} - \left(\frac{j_1-m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2-m_2+1}{2j_2+2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y_r^{t+1}\, Y_s^{\nu}}\right] (-id-) \end{cases}$$

Les mêmes Y interviennent ici :

$$Y_r\, Y_{s+1} = Y_k + Y_{k-2} + \cdots\cdots$$

Soient $E''_{j_1 m_1, j_2 m_2}$, $F''_{j_1 m_1, j_2 m_2}$ les valeurs de $\int \beta \vec{\sigma}.\vec{A}$ et $\int \beta \vec{\sigma}.\vec{\alpha}$ dans ce cas.

$$P''_{j_1 m_1, j_2 m_2} = |E''|^2 \sim f_r^2 g_0^2 + g_{-r-2}^2 f_{-s-2}^2$$

$$Q''_{j_1 m_1, j_2 m_2} = |F''|^2 \sim f_s^2 g_r^2 + g_{-s-2}^2 f_{-r-2}^2$$

et, tenant compte de (3) et (4) :

$$P''_{j_1 m_1, j_2 m_2} \sim \frac{q^2}{\pi} \frac{(qR)^{2s}}{[1\times 3\times \cdots \times(2s+1)]^2}\left(f_r^2 + g_{-r-2}^2\right) \qquad (10)$$

$$Q''_{j_1 m_1, j_2 m_2} \sim \frac{q^2}{\pi} \cdot \frac{(qR)^{2s+2}}{[1\times 3\times \cdots \times(2s+3)]^2}\left(g_r^2 + f_{-r-2}^2\right) \qquad (11)$$

Donc d'après (7), (pour les spectres β) :

$$\frac{(\varepsilon_0 - 1)^2 R^2}{(2s+3)^2} P''_{j_1 m_1, j_2 m_2} \sim \left(\frac{\alpha Z}{2r+2}\right)^2 Q''_{j_1 m_1, j_2 m_2} \qquad (12)$$

de plus

$$Q'' \sim \frac{(\varepsilon_0 - 1)^2 R^2}{(2s+3)^3} P \longrightarrow P'' \sim \left(\frac{\alpha Z}{2r+2}\right)^2 P$$

Si nous admettons que $\frac{\alpha Z}{2}$ et $(\varepsilon_0^2 - 1)^{1/2} R$ sont, en général, du même ordre, P'' et Q'' sont du même ordre

(P'' comespond à Y_k .....
(Q'' " à Y_k $\qquad Q'' \sim P''$

En réalité, les valeurs de $\frac{\alpha Z}{2}$ et de $(\varepsilon_0^2 - 1)^{1/2} R$ dépendent du noyau et de la transition considérée, et la classification des spectres interdits que nous donnerons ainsi n'a qu'une valeur d'indication, qu'il faut compléter par le calcul exact de la probabilité de transition dans chaque cas concret.

...

2°- Calcul de $\vec{A'} = \overline{\psi}\beta\vec{\alpha}\psi = \overline{\psi}\beta\vec{\alpha}C\overline{\varphi}$

$C\overline{\varphi} = i\left(-\overline{\varphi_4} \quad \overline{\varphi_3} \quad \overline{\varphi_2} \quad -\overline{\varphi_1}\right)$ en supprimant l'indice - de φ-

$\beta\alpha_1 C\overline{\varphi} = i\left(-\overline{\varphi_1} \quad \overline{\varphi_2} \quad -\overline{\varphi_3} \quad \overline{\varphi_4}\right)$

$\beta\alpha_2 C\overline{\varphi} = -\left(\overline{\varphi_1} \quad \overline{\varphi_2} \quad \overline{\varphi_3} \quad \overline{\varphi_4}\right)$

$\beta\alpha_3 C\overline{\varphi} = i\left(\overline{\varphi_2} \quad \overline{\varphi_1} \quad \overline{\varphi_4} \quad \overline{\varphi_3}\right)$

$$\begin{cases} A'_x = i\left(-\overline{\psi_1}\varphi_1 + \overline{\psi_2}\varphi_2 - \overline{\psi_3}\varphi_3 + \overline{\psi_4}\varphi_4\right) \\ A'_y = -\left(\overline{\psi_1}\varphi_1 + \overline{\psi_2}\varphi_2 + \overline{\psi_3}\varphi_3 + \overline{\psi_4}\varphi_4\right) \\ A'_z = i\left(\overline{\psi_1}\varphi_2 + \overline{\psi_2}\varphi_1 + \overline{\psi_3}\varphi_4 + \overline{\psi_4}\varphi_3\right) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} A'_x + iA'_y = -2i\left(\overline{\psi_4}\varphi_1 + \overline{\psi_3}\varphi_3\right) \\ A'_x - iA'_y = 2i\left(\overline{\psi_2}\varphi_2 + \overline{\psi_4}\varphi_4\right) \\ A'_z = i\left(\overline{\psi_1}\varphi_2 + \overline{\psi_2}\varphi_1 + \overline{\psi_3}\varphi_4 + \overline{\psi_4}\varphi_3\right) \end{cases}$$

a) et de type différent $j_1 = \begin{cases} \ell_1 + \frac{1}{2} \\ \ell_1 - \frac{1}{2} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} \ell_2 - \frac{1}{2} = j_2 \\ \ell_2 + \frac{1}{2} \end{matrix}$

$j_1 + j_2 = \ell_1 + \ell_2$

$$\text{(I3)} \quad \begin{cases} A'_x + iA'_y = 2i\left(\frac{j_1 - m_1 + 1}{2j_1 + 2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2 + m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y^t_{r+1}\, Y^{\nu}_{s}}\left(f_r f_{-s-2} \text{ ou } -g_{-r-2} g_s\right) \\ A'_x - iA'_y = 2i\left(\frac{j_1 + m_1 + 1}{2j_1 + 2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2 - m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y^{t+1}_{r+1}\, Y^{\nu+1}_{s}}\left(\quad\text{id}\quad\right) \\ A'_z = i\left[-\left(\frac{j_1 - m_1 + 1}{2j_1 + 2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2 - m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y^t_{r+1}\, Y^{\nu+1}_{s}} + \left(\frac{j_1 + m_1 + 1}{2j_1 + 2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2 + m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y^{t+1}_{r+1}\, Y^{\nu}_{s}}\right]\left(-\text{id}\right. \end{cases}$$

où $Y_{r+1}\, Y_s = Y_k + Y_{k-2} + \ldots$

$$\text{(I4)} \quad \begin{cases} a'_x + ia'_y = -2i\left(\frac{j_1 + m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2 - m_2 + 1}{2j_2 + 2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y^t_r\, Y^{\nu}_{s+1}}\left(g_r g_{s-2} \text{ ou } -f_{-r-2} f_s\right) \\ a'_x - ia'_y = +2i\left(\frac{j_1 - m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2 + m_2 + 1}{2j_2 + 2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y^{t+1}_r\, Y^{\nu+1}_{s+1}}\left(\quad\text{id}\quad\right) \\ a'_z = i\left[-\left(\frac{j_1 + m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2 + m_2 + 1}{2j_2 + 2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y^t_r\, Y^{\nu+1}_{s+1}} + \left(\frac{j_1 - m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2 - m_2 + 1}{2j_2 + 2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y^{t+1}_r\, Y^{\nu}_{s+1}}\right]\times\left(-\text{id}\right. \end{cases}$$

où les Y sont les mêmes que pour (I3)

Soient $E'''_{j_1 m_1 / j_2 m_2}$, $F'''_{j_1 m_1 / j_2 m_2}$ les valeurs de $\int \beta\vec{\alpha}\vec{A'}$, $\int \beta\vec{\alpha}.\vec{a'}$

$$P'''_{j_1 m_1 / j_2 m_2} = \left|E'''\right|^2 \sim f_r^2 f_{-s-2}^2 + g_{-r-2}^2 g_s^2$$

$$Q'''_{j_1 m_1, j_2 m_2} = |F'''|^2 \sim g_r^2 g_{-s-2}^2 + f_{r-2}^2 f_s^2$$

$$P'''_{j_1 m_1, j_2 m_2} \sim \frac{q^2}{\pi} \frac{(qR)^{2s}}{[1\times 3\times \cdots \times(2s+1)]^2} (f_r^2 + g_{-r-2}^2) \qquad (I5)$$

$$Q'''_{j_1 m_1, j_2 m_2} \sim \frac{q^2}{\pi} \frac{(qR)^{2s+2}}{[1\times 3\times \cdots \times(2s+3)]^2} (g_r^2 + f_{-r-2}^2) \qquad (I6)$$

$$\left[\frac{(\varepsilon-1)R}{2s+3}\right]^2 P''' \sim \left(\frac{\alpha 2}{2r+2}\right)^2 Q'''$$

$\left\{\begin{array}{l} P''' \text{ correspond à } Y_k \cdots\cdots \\ Q''' \quad " \quad \text{à } Y_k \cdots\cdots \quad Q''' \sim P''' \end{array}\right.$

$\int \beta \vec{\alpha}_N$ se comportant comme $\int \frac{\vec{X}}{i}$ ou $\int Y_1$ .. au point de vue des règles de sélection, après multiplication par Y_1 :

$\left\{\begin{array}{l} P''' \text{ correspond à } Y_{k+1} \cdots\cdots \\ Q''' \quad " \quad \text{à } Y_{k+1} \cdots\cdots \end{array}\right.$

D'autre part, $P'''_{j_1 m_1, j_2 m_2} \sim C^2 P'' \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 P'' \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{\alpha 2}{2}\right)^2 P$

b) <u>Ψ et Ψ de même type</u> : $\left.\begin{array}{l} j_1 = l_1 + \frac{1}{2} \\ l_1 - \frac{1}{2} \end{array}\right\} = j_2 \quad \left.\begin{array}{l} \longleftrightarrow \quad l_2 + \frac{1}{2} \\ \qquad\quad l_2 - \frac{1}{2} \end{array}\right\}$

$$j_1 + j_2 = l_1 + l_2 \pm 1$$

(I7)
$$\left\{\begin{array}{l} A'_x + iA'_y = -2i\left(\frac{j_1+m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2+m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y_r^t Y_s^v} \quad (g_r g_s \text{ ou } -f_{-r-2} f_{-s-2}) \\ A'_x - iA'_y = 2i\left(\frac{j_1-m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2-m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y_r^{t+1} Y_s^{v+1}} \quad (\text{— id —}) \\ A'_z - i\left[\left(\frac{j_1+m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2-m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y_r^t Y_s^{v+1}} + \left(\frac{j_1-m_1}{2j_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_2+m_2}{2j_2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y_r^{t+1} Y_s^v}\right] (-id-) \end{array}\right.$$

où : $Y_r Y_s = Y_{k-1} + Y_{k-3} + \cdots$

$$a'_x + ia'_y \sim \overline{Y_{r+1}^t Y_{s+1}^v} \quad (f_r f_s \text{ ou } -f_{-r-2} f_{-s-2})$$

$$a'_x - ia'_y \sim \overline{Y_{r+1}^{t+1} Y_{s+1}^{v+1}} \quad (\text{— id —})$$

$$a'_z \sim \left(\overline{Y_{r+1}^t Y_{s+1}^{v+1}} + \overline{Y_{r+1}^{t+1} Y_{s+1}^v}\right) (\text{— id —})$$

où : $Y_{r+1} Y_{s+1} = Y_{k+1} + Y_{k-1} + \cdots$

Nous n'aurons pas, dans la suite, à utiliser les expressions complètes.

En désignant par E' F' les valeurs de $\int \beta \vec{\alpha}.\vec{A}'$, $\int \beta \vec{\alpha}.\vec{a}'$

$$P'_{j_1 m_1, j_2 m_2} = |E'|^2 \sim \frac{q^2}{\pi} \frac{(qK)^{2s}}{[1\times 3\times \cdots \times(2s+1)]^2} (g_r^2 + f_{-r-2}^2) \qquad (I8)$$

$$Q'_{j_1 m_1, j_2 m_1} = |F'|^2 \sim \frac{q^2}{\pi} \frac{(qR)^{2s+2}}{[1\times 3\times \cdots \times(2s+3)]^2} (f_r^2 + g_{-r-2}^2)$$

...

$P' \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 P$ et $Q' \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 Q$ $Q' \ll P'$

(P' correspond à Y_{k-1}.....

{ Q' " à Y_{k+1}.....

soit, après multiplication par $Y_1 \sim \frac{\vec{r}}{r}$

{ P' correspond à Y_k.....

{ Q' " à Y_{k+2}...

En résumé, l'ordre de grandeur des P, Q... ne dépend que de $k = j_1 + j_2$, et l'ordre des fonctions angulaires correspondantes aussi.

$P_k \sim \left[(\varepsilon_0^2 - 1) R^2\right]^{k-1}$ $\quad P''_k \sim \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 P_k$ $\quad P'''_k \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 P''_k$

$Q_k \sim \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 P_{k+1}$ $\quad Q''_k \sim P_{k+1}$ $\quad Q'''_k \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 P_{k+1}$

$P'_k \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 P_k$

$Q'_k \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 Q_k$

Avec l'hypothèse faite $\frac{\alpha Z}{2} \sim (\varepsilon_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}} R_1$ P''_{k_1} Q''_k sont du premier ordre par rapport à P_{k_1} en $(\varepsilon_0^2 - 1)\ R^2$, Q_k du 2ème ordre.

Si nous supposons de plus, toujours comme indication, $\frac{v}{c} \sim (\varepsilon_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}} R$ (spectres de β durs : $\varepsilon_0 \gg 1$), P'''_k et Q'''_k sont du deuxième ordre par rapport à P_k ; P'_k est du premier ordre; Q'_k du 3ème ordre.

2I3- Nous avons donc, pour k fixé, le tableau suivant :

	Ordre en $(\varepsilon_0^2 - 1)R^2$	Eléments de matrice	Fonctions angulaires correspondantes
	k-1	E_k	Y_{k-1} +...
(I)	k	($E''_k + F''_k$	Y_k + ...
		{ E'_k	Y_k +.....
	k≠I	{ $E'''_k + F'''_k$	Y_{k+1} +....
		(F_k	Y_{k+1} +....
	k+2	F'_k	Y_{k+2} +....

...

En réalité nous avons (pour les émissions β) :

$$\begin{cases} E''_k \sim \left(\frac{\alpha Z}{2}\right) E_k \\ E'_k \sim \left(\frac{v}{c}\right) E_k \end{cases} \qquad F''_k \sim E_{k+1} \sim (\xi^2-1)^{\frac{1}{2}} R \cdot E_k$$

$$\begin{cases} E'''_k \sim \left(\frac{v}{c}\right)\left(\frac{\alpha Z}{2}\right) E_k \\ F_k \sim \left(\frac{\alpha Z}{2}\right) E_{k+1} \end{cases} \qquad F'''_k \sim \left(\frac{v}{c}\right) E_{k+1}$$

$$F'_k \sim \left(\frac{v}{c}\right)\left(\frac{\alpha Z}{2}\right) E_{k+1}$$

et 3 valeurs interviennent pour classer les ordres de grandeur : $(\xi_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}} R$, $\frac{\alpha Z}{2}$ (2) , $\frac{v}{c}$

On ne peut donc donner une classification rigoureusement valable pour toutes les transitions. En particulier, pour les spectres de β mous, $\frac{v}{c} \gg (\xi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} R$, et, s'il s'agit de noyaux légers, on pourra aussi avoir : $\frac{v}{c} \gg \frac{\alpha Z}{2}$ (+)

Dans [I9] nous avions posé : $E_k = G_k$ $E'_k = G'_k$ $E''_k + F''_k = G''_k$ $E'''_k + F'''_k + F_k = G'''_k$ $(E'''_k + F'''_k > F_k)$
et indiqué, pour les G, les ordres de grandeur des termes E.
Ψ_i et Ψ_f ayant la forme (I) du § 2I :

$$\Psi = (\tau) \sum (\sigma)\, \Phi(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_A) = (\tau)\, f(z_1 \ldots z_A) \sum (\sigma)\, \psi(u_1 \ldots u_A)$$

pour former $\int \Psi_f \beta \vec{\sigma} \vec{A} \Psi_i$, $\int \Psi_f \beta \vec{\alpha} \vec{A} \Psi_i$, nous sommes conduits à des intégrales sur les variables angulaires de la forme :

$$\int \overline{\psi_{L'}^{M_e}}(u_1 \ldots u_A)\, Y_n^{\mu_e}\, \psi_L^{M_e}(u_1 \ldots u_A)\, du_1 \ldots du_A$$

D'après la théorie des groupes, cette intégrale est nulle si l'on n'a pas : $L' = L+n$, $L+n-2$, ... ou $|L-n|$
règle (4-§ I2I) et conservation de la parité.
Donc :
1°- Supposons $\Delta L = |L' - L| = 0$: $\int \overline{\psi_{L'}}\, Y_0\, \psi_L = \int |\psi_L|^2 \neq 0$

L'élément de matrice le plus grand est alors E_1 $(= \epsilon_1)$ obtenu pour $k = 1 \longrightarrow Y_{k-1} = Y_0$
$k = 1$ lorsque $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ (ondes S pour électron et neutrino) ...

(+) C'est le cas de ^{14}C -cf [20] . . . . et § 623

La probabilité de transition a l'ordre le plus grand possible : la transition est permise.

Des éléments E_1'', F_1'', F_1 peuvent aussi être associés à la fonction angulaire Y_s, mais sont beaucoup plus petits que E_1 Nous prendrons, dans chaque cas, les termes les plus grands seulement.

2°- $\Delta L = 1$: $\int F_0 Y_1 \psi_2 \neq 0$ tandis que $E_1 = 0$

Les éléments les plus grands sont obtenus pour :

$\begin{cases} k = 2 \longrightarrow E_2 = G_2 & \text{avec } Y_1 \\ k = 1 \longrightarrow G_1'' + G_1' & " \end{cases}$

3°- $\Delta L = 2$:

$\begin{cases} k = 3 \longrightarrow E_3 = G_3 & \text{avec } Y_2 \\ k = 2 \longrightarrow G_2'' + G_2' & " \\ k = 1 \longrightarrow G_1''' & \end{cases}$

.....

$\Delta L = n$

$\begin{cases} k = n+1 \longrightarrow E_{n+1} = G_{n+1} & \text{avec } Y_n \\ k = n \longrightarrow G_n'' + G_n' & " \\ k = n-1 \longrightarrow G_{n-1}'' & " \\ k = n-2 \longrightarrow F'_{n-2} & " \end{cases}$

Mais on peut exclure $k = n-2$ si l'on admet que $S + S' \leq 1$ avec les hypothèses actuelles de structure (qui impliquent un couplage Russell-Saunders), on aurait presque toujours $S+S'=1$:

$S = 0 \quad S'=1$ ou $S = 1 \quad S'=0$ (2 extra-nucléons)

$S = \frac{1}{2} \quad S'=\frac{1}{2}$ (1 extra-nucléon)

En effet, si $S + S' \leq 1$

J ayant l'une des valeurs : $L-S \ldots L+S$ (pour $L \geq S$)(+)

J' " " " " $L'S' \ldots L'+S'$ (pour $L' \geq S'$

on a : $|\Delta J - \Delta L| \leq S + S' \leq 1$

tandis que $k = n-2$ entraîne $\Delta J \leq k = \Delta L - 2$

avec la restriction (2) $S+S' \leq 1$, les probabilités de transition correspondent aux valeurs de k: n-1, n, n+1,

(+) On a $L < S$ ou $L' < S'$ seulement si $L=0$ ou $L'=0$, et la conclusion reste valable.

lorsque DL = n; les valeurs possibles de ΔJ sont aussi n-1,n,n+1, et vérifient $\Delta J \leq k$ d'où le tableau :

ΔL	k	ΔJ	Probabilité	
n	n - 1	n - 1	$\lvert G'''_{n-1}\rvert^2$	(3)
	n	n-1,n	$\lvert G''_n + G'_n\rvert^2$	
	n + 1	n-1,n,n+1	$\lvert G_{n+1}\rvert^2$	

et en classant par rapport aux valeurs de J, grandeur physique

ΔL	ΔJ	Probabilité	k	
n	n - 1	$\lvert G'''_{n-1}\rvert^2 + \lvert G''_n + G'_n\rvert^2 + \lvert G_{n+1}\rvert^2$	n-1,n,n+1	(4)
	n	$\lvert G''_n + G'_n\rvert^2 + \lvert G_{n+1}\rvert^2$	n,n+1	
	n + 1	$\lvert G_{n+1}\rvert^2$	n+1	

(pour les spectres mous $G_{n+1}{}^2$ est plus petit que les 2 autres termes).

Donc, si nous admettons (2), nous avons pour les premiers ordres, d'après (4)

ΔL	ΔJ	Probabilité	k	
0	0	$\lvert G_1\rvert^2$	1	
	1	$\lvert G_1\rvert^2$	1	
1	0	$\lvert G''_1 + G'_1\rvert^2 + \lvert G_2\rvert^2$	1,2	
	1	$\lvert G''_1 + G'_1\rvert^2 + \lvert G_2\rvert^2$	1,2	(5)
	2	$\lvert G_2\rvert^2$	2	
2	I	$\lvert G'''_1\rvert^2 + \lvert G''_2 + G'_2\rvert^2 + \lvert G_3\rvert^2$	1,2,3	
	2	$\lvert G''_2 + G'_2\rvert^2 + \lvert G_3\rvert^2$	2,3	
	3	$\lvert G_3\rvert^2$	3	

...

Si l'on rejette l'hypothèse (2), on ne peut pas indiquer de valeurs précises de ΔJ pour chaque ΔL; on a seulement $\Delta J \leqslant k$:

ΔL	k	ΔJ	Probabilité
n	$n-2$	$\leqslant n-2$	$\lvert F'_{n-2}\rvert^2$
	$n-1$	$\leqslant n-1$	$\lvert G'''_{n-1}\rvert^2$
	n	$\leqslant n$	$\lvert G''_n+G'_n\rvert^2$
	$n+1$	$\leqslant n+1$	$\lvert G_{n+1}\rvert^2$

Et en classant par rapport aux ΔJ :

ΔL	ΔJ	k	Probabilité
n	$0,\ldots\ldots, n-2$ (+)	$n-2,\ldots,n+1$	$\lvert F'_{n-2}\rvert^2+\lvert G'''_{n-1}\rvert^2+\lvert G''_n+G'_n\rvert^2+\lvert G_{n+1}\rvert^2$
	$n-1$	$n-1,n,n+1$	$\lvert G'''_{n-1}\rvert^2+\lvert G''_n+G'_n\rvert^2+\lvert G_{n+1}\rvert^2$
	n	$n,n+1$	$\lvert G''_n+G'_n\rvert^2+\lvert G_{n+1}\rvert^2$
	$n+1$	$n+1$	$\lvert G_{n+1}\rvert^2$

pour

D'où/les Iers ordres, le tableau :

L	J	Probabilité	k
0	0	$\lvert G_1\rvert^2$	1
	I	$\lvert G_1\rvert^2$	I
1	0	$\lvert G''_1+G'_1\rvert^2+\lvert G_2\rvert^2$	I,2
	1	$\lvert G''_1+G'_1\rvert^2+\lvert G_2\rvert^2$	1,2
	2	$\lvert G_2\rvert^2$	2
2	0	$\lvert G'''_1\rvert^2+\lvert G''_2+G'_2\rvert^2+\lvert G_3\rvert^2$	1,2,3
	1	$\lvert G'''_1\rvert^2+\lvert G''_2+G'_2\rvert^2+\lvert G_3\rvert^2$	1,2,3
	2	$\lvert G''_2+G'_2\rvert^2+\lvert G_3\rvert^2$	2,3
	3	$\lvert G_3\rvert^2$	3

(+) En fait, pour j_1 et j_2 donnés, ΔJ peut avoir une limite inférieure, puisqu'on a aussi : $J + J' \geqslant \lvert j_1-j_2\rvert$
On devra examiner ce point dans chaque cas particulier.

3	0,1	$\lvert F_1' \rvert^2 + \lvert G_2''' \rvert^2 + \lvert G_3'' + G_3' \rvert^2 + \lvert G_4 \rvert^2$	1,2,3,4
	2	$\lvert G_2''' \rvert^2 + \lvert G_2'' + G_2' \rvert^2 + \lvert G_4 \rvert^2$	2,3,4
	3	$\lvert G_3'' + G_3' \rvert^2 + \lvert G_4 \rvert^2$	3,4
	4	$\lvert G_4 \rvert^2$	4

Ces tableaux s'appliquent aux capteurs K comme aux émissions β , les ordres de grandeur successifs étant seulement caractérisés par d'autres valeurs que $(\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}} R$, $\alpha 2$ (cf App.II).

REMARQUES.-

1°- Konopinski [I5] n'utilise pas la méthode des harmoniques sphériques que nous avons utilisée à la suite de Marshak [2I] , mais une méthode "tensorielle".

Elle consiste à prendre des ondes planes pour neutrino et électron (donc à négliger l'action Coulombienne du noyau en Ière approximation) :

$\psi = A\, e^{i\vec{p}\vec{r}}$ $\qquad \varphi = B\, e^{-i\vec{q}\vec{r}}$ (antineutrino)

et à développer $e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{r}} = 1 - i(\vec{p}+\vec{q})\vec{r} + \frac{1}{2}[(\vec{p}+\vec{q})\vec{r}]^2 + \dots$

Le rapport d'un terme au précédent est :

$\simeq |\vec{p}+\vec{q}|\, R \sim (\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}} R$

$\int \beta \vec{\sigma}$ par exemple, donne les termes successifs :

$\int \overline{\Psi_f} \beta \vec{\sigma}.\vec{A}_0 \psi_i$, $\sum_{\mu=1}^{3} P_\mu \int \overline{\Psi_f} x_\mu \beta \vec{\sigma}.\vec{A}_0 \psi_i$, $\sum_{\mu,\nu} P_\mu P_\nu \int \overline{\Psi_f} x_\mu x_\nu \beta \vec{\sigma}.\vec{A}_0 \psi_i$, etc...

avec $\begin{cases} \vec{p}+\vec{q} = (P_1 \;\; P_2 \;\; P_3) \\ \vec{r} = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \end{cases}$

$\vec{A}_0$ est formé avec les spineurs $\begin{cases} A = (A_1\; A_2\; A_3\; A_4) \\ B = (B_1\; B_2\; B_3\; B_4) \end{cases}$

$\vec{A}_0 = \overline{A}\, \beta \vec{\sigma}\, B$

$\int \overline{\Psi_f} \beta \vec{\sigma}.\vec{A}_0 \psi_i$ est de la forme : $\int \beta \vec{\sigma}.\vec{A}_0 Y_0$

$\int \overline{\Psi_f} x_\mu \beta \vec{\sigma}.\vec{A}_0 \psi_i$ se ramène à : $R \int \beta \vec{\sigma}.\vec{A}_0 Y_1$

$\int \overline{\Psi_f} x_\mu x_\nu \beta \vec{\sigma}.\vec{A}_0 \psi_i$ ——— : $R^2 \int \beta \vec{\sigma}.\vec{A}_0 Y_2$ ...

et l'on voit ainsi la relation de la méthode avec celle des harmoniques sphériques; ceci explique aussi pourquoi les puissances successives de $(\varepsilon_0^2 - 1) R^2$ sont associées aux fonctions de Laplace d'indices croissants, quand on considère les termes d'un type déterminé ($\int \beta \vec{\sigma}$ avec ψ, φ de types différents par exemple). Dans cette méthode évidemment, $\sum_{j_1 \ell_1 m_1}$ doit être remplacée par une somme sur toutes les directions $\vec{p}$, $\vec{q}$, et sur les 2 valeurs possibles du spin pour électron et neutrino.

Greuling [I8] prend une onde plane $B e^{-i\vec{q}\vec{r}}$ pour le neutrino, et une onde sphérique $(j_1 \ell_1 m_1)$ pour l'électron, et fait ensuite $\sum j_1 \ell_1 m_1$ et sur toutes les directions pour $\vec{q}$ (avec 2 valeurs du spin pour chaque direction). Le principe de cette méthode n'est pas correct car on ne peut déterminer simultanément $\vec{q}$ et j_1 m_1 quand $\vec{q}$ a une direction quelconque.

En effet, on a $\vec{p} + \vec{q} + \vec{P} = 0$ ($\vec{P}$ Impision prise par le noyau).

$$-[\vec{q}, j_{1z}] = [\vec{p} + \vec{P}, j_{1z}] = [\vec{p}, j_{1z}] \neq 0$$

$[\vec{p}, j_{1z}] = 0$ seulement si $\vec{p}$ a la direction Oz, et, même dans ce cas $[p_z, j_1^2] \neq 0$

La méthode conduit à des résultats exacts pour les règles de sélection, mais peut introduire des erreurs dans le calcul exact des probabilités de transition.

En ramenant les tenseurs à des formes irréductibles, Greuling obtient les résultats suivants :

Ordre d'interdiction	ΔJ	Eléments de matrice
n	n	$Q_n(\beta\vec{\sigma}\wedge\vec{r},\vec{r}) + Q_n(\beta\vec{\alpha},\vec{r}) + Q_{n+1}(\beta\vec{\sigma},\vec{r})$
	n + 1	$Q_{n+1}(\beta\vec{\sigma},\vec{r})$

Avec l'hypothèse (2), par exemple, nous trouvons en plus une transition $\Delta J = n-1$, avec des éléments de matrice qui s'écriraient dans la notation de Greuling :

$Q_{n-1}(\beta\vec{\alpha}\wedge\vec{r},\vec{r})$, $Q_n(\beta\vec{\sigma}\wedge\vec{r},\vec{r}) + Q_n(\beta\vec{\alpha},\vec{r})$, $Q_{n+1}(\beta\vec{\sigma},\vec{r})$

(en négligeant F_{n-1}, E'_n)

...

Cette différence s'explique immédiatement par le fait que cet auteur, comme les précédents, évite d'introduire un nombre quantique L . On ne peut donc pas, dans sa théorie, associer un ΔL à une transition; pour une transition, on a en somme un "mélange" de valeurs ΔL avec des proportions sensiblement égales, mais tous de même parité. Ainsi, si $\Delta J = 0$ ou 1, et s'il n'y a pas changement de parité (non), la transition est une superposition de transitions $\Delta L = 0,2,4\ldots$ Le terme le plus important est alors G_1 correspondant à $\Delta L = 0$, et les autres sont négligeables devant G_1. Nous n'aurons donc pas à considérer $\Delta J = 0,1$ avec $\Delta L = 2$, mais seulement $\Delta J = 2$ ou 3 pour l'ordre d'interdiction 2.

En général, pour l'ordre d'interdiction n, on n'a pas à considérer $\Delta J \leq n-1$, mais seulement $\Delta J = n, n+1$.

Nous retrouvons donc la classification de Konopinsky et Greuling quand :

$$\psi = a_L \psi_L + a_{L\pm2} \psi_{L\pm2} + \ldots$$

$|a_L|, |a_{L\pm2}|, \ldots$ étant du même ordre, c'est-à-dire lorsque J seul est un bon nombre quantique.

2°- La classification (7) des spectres interdits, correspondant aux valeurs de ΔL et ΔJ, ou celle de Greuling correspondant aux valeurs de ΔJ seules, sont bien en accord avec les règles de sélection sur J.

$G_{n+1} \sim \int \psi_n \overline{\psi_{J'}} \beta \vec{\sigma} \psi_J \neq 0$ pour $J - J' \leq n+1$ (si $J > J'$)

$G'_n \sim \int \psi_{n-1} \overline{\psi_{J'}} \beta \vec{\alpha} \psi_J \neq 0$ " $J - J' \leq n$

$G''_n \sim \int \psi_{n-1} \overline{\psi_{J'}} \beta \vec{\sigma} \wedge \vec{r} \psi_J \neq 0$ ——— id ———

$G'''_{n-1} \sim \int \psi_{n-2} \overline{\psi_{J'}} \beta \vec{\alpha} \wedge \vec{r} \psi_J \neq 0$ " $J - J' \leq n-1$

En effet, $\overline{\psi'} \beta \vec{\sigma} \psi$ étant un vecteur,

$\beta \vec{\sigma} \psi_J \rightarrow \psi_{J-1}$ ou ψ_J ou ψ_{J+1}, et $\int \psi_n \overline{\psi_{J'}} \beta \vec{\sigma} \psi_J = 0$

si l'on n'a pas :

$$J'+n-\lambda = \begin{cases} J-1 \\ J \\ J+1 \end{cases} \quad \text{où : } \begin{cases} 0 \leq \lambda \leq 2n & \text{si } J' > n \\ 0 \leq \lambda \leq 2J' & \text{si } J' < n \end{cases}$$

...

$$J-J' = \begin{cases} n+1-\lambda & \leqslant n+1 \\ n-\lambda & \\ n-\lambda-1 & \end{cases}$$

On raisonne de même pour G'_n etc...; aucun des éléments de matrice figurant dans (7) n'est donc nul.

2I4.- Facteurs leptoniques pour la capture K et l'émission β^+:

Pour la capture K, les facteurs leptoniques diffèrent un peu des précédents : il y a ici absorption d'un négaton du cortège électronique et d'un neutrino (ou émission d'un anti-neutrino). La fonction d'onde de l'anti-neutrino est toujours $\varphi = C\overline{\varphi}_-$ et, celle de l'électron ψ, d'où :

$\vec{A} = \overline{\varphi}\beta\vec{\sigma}\psi$ au lieu de $\overline{\psi}\beta\vec{\sigma}\psi$

$\vec{A}' = \overline{\varphi}\beta\vec{\alpha}\psi$ " " " $\overline{\psi}\beta\vec{\alpha}\psi$

A cause de l'Hermiticité de $\beta\vec{\sigma}$, $\beta\vec{\alpha}$ on doit donc avoir pour A_x, A_y, A_z et A'_x, A'_y, A'_z des expressions conjuguées des précédentes, ce qui ne change rien aux résultats.

L'émission β^+ peut être considérée comme la capture d'un négaton dans un état d'énergie négative, mais il revient au même de changer e en $-e$ ou Z en $-Z$ dans les formules définitives.

2I5- Variation de spin au cours de la transition.-

Dans les hypothèses actuelles, $\int \beta\vec{\sigma}.\vec{A} \neq -\int \vec{\sigma}.\vec{A}$ où :

$$\vec{\sigma}.\vec{A} = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}}\frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{\sqrt{2}}\frac{A_x - iA_y}{\sqrt{2}} + \sigma_z A_z$$

et l'on est conduit aux "intégrales" suivantes sur les variables de spin et de charge σ'_3, τ'_3 (c'est-à-dire en fait aux sommes $\sum_{\sigma'_3\tau'_3}$) :

$$\int (\tau)_f^{2S+1} (\tau)_{S_z-1} \sum_a \pi^{(a)} \frac{\sigma_x^{(a)} - i\sigma_y^{(a)}}{\sqrt{2}} (\tau)_i^{2S+1} (\sigma)_{S_z} = \sum\nolimits_-$$

$$\int (\tau)_f^{2S+1} (\sigma)_{S_z+1} \sum_a \pi^{(a)} \frac{\sigma_x^{(a)} + i\sigma_y^{(a)}}{\sqrt{2}} (\tau)_i^{2S+1} (\sigma)_{S_z} = \sum\nolimits_+$$

$$\int (\tau)_f^{2S+1} (\sigma)_{S_z} \sum_a \pi^{(a)} \sigma_z^{(a)} (\tau)_i^{2S+1} (\sigma)_{S_z} = \sum\nolimits_z$$

$\sum_-$ à $S'_z = S_z - 1$

$\sum_z$ correspond à $S'_z = S_z$ $\sum_+$ à $S'_z = S_z + 1$

...

ce qui s'accorde avec le fait que :

$A_x + i A_y$ est toujours associé à $\overline{Y^t Y^v} \to Y^{-(\mu-1)}$

$A_x - i A_y$ " " " " $\overline{Y^{t+1} Y^{v+1}} \to Y^{-(\mu+1)}$

A_z " " " " $\overline{Y^{t+1} Y^v} + \overline{Y^t Y^{v+1}} \to Y^{-\mu}$

Σ_- est multiplié par : $\int \overline{\psi_{L'}^{M_L'}} Y_n^{-(\mu-1)} \psi_L^{M_L} \neq 0$ pour $M_\ell - M'_\ell = \mu -$

Σ_+ " " " : $\int \overline{\psi_{L'}^{M_L'}} Y_n^{-(\mu+1)} \psi_L^{M_L} \neq 0$ " $M_\ell - M'_\ell = \mu +$

Σ_z " " " : $\int \overline{\psi_{L'}^{M_L'}} Y_n^{-\mu} \psi_L^{M_L} \neq 0$ " $M_\ell - M'_\ell = \mu$

Comme : $M = M_\ell + S_z$, $M' = M'_\ell + S'_z$ ceci conduit bien toujours à

<u>$M - M' = \mu$</u>

Si l'on avait toujours $\sum_a \pi^{(a)} \vec{\sigma}^{(a)} = cte \times \sum_a \vec{\sigma}^{(a)}$, $\frac{1}{2} \sum_a \vec{\tau}^{(a)}$ représentant le spin total, on aurait $\Delta S = 0$.

En fait, on a : $\sum_a \pm \vec{\sigma}^{(a)}$ qui représente un vecteur quelconque dans l'"espace des spins" d'où :

<u>$\Delta S = 0$ ou 1</u>

Ainsi pour $(\tau)_i = {}^1(\tau)_0 = \frac{I}{\sqrt{2}} \left[u+(1)\, u-(2) - u-(1) u+(2) \right]$

(neutron + proton)

$$\pi^{(1)}\, {}^1(\tau)_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_-(1)\, u_-(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} {}^3(\tau)_{-1}$$

$$\pi^{(2)}\, {}^1(\tau)_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} u_-(1)\, u_-(2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} {}^3(\tau)_{-1}$$

$(\tau)_f = {}^3(\tau)_{-1}$ (2 protons) et :

$$(\tau)_f \sum_a \pi^{(a)} \vec{\sigma}^{(a)} (\tau)_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{\sigma}^{(1)} - \vec{\sigma}^{(2)} \right)$$

Pour $\int \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{A}'$, on ne peut faire un raisonnement analogue : $\beta \vec{\alpha} = -i \rho_2 \vec{\sigma}$ et il faut introduire les matrices de masse propre (ρ), donc abandonner la représentation(1 du § I2 : le couplage Russel-Saunders n'est plus rigoureusement exact, mais seulement approché.

On peut, cependant, toujours remplacer $\sum_a \pi^{(a)} \beta \vec{\alpha}^{(a)}$ par $\sum_a \pi^{(a)} \frac{\vec{X}_a}{f}$ qui est aussi un vecteur polaire, pour les règles de sélection sur J et L.

...

D'ailleurs, si $H = -c\left(\sum_a \vec{\alpha}^{(a)} \vec{p}_a - \beta_a mc\right) + V(X_1, \ldots X_A)$ pour l'ensemble du noyau, V ne dépendant pas des $\vec{p}_a$ (potentiel "statique"), $[H, \vec{X}_a] = -c\vec{\alpha}^{(a)} \frac{\hbar}{i}$ et le calcul du § 2II reste exact.

Pour confirmer les résultats précédents, nous allons étudier le cas d'un nucléon dans un potentiel central en théorie de Dirac (ou, ce qui revient au même, un modèle nucléaire à états individuels). Pour $\frac{v}{c} \ll 1$, nous aurons un couplage Russell-Saunders approché, et nous devrons retrouver nos résultats. Pour $\frac{v}{c} \approx 1$, nous aurons une idée de ce qui se passe dans le cas d'un fort couplage spin-orbite, même lorsqu'il est dû à la nature des intéractions nucléaires, comme le suppose M.G. Mayer, et non à l'effet Relativiste de Dirac.

22- Cas d'un modèle nucléaire à états individuels.-

22I.- Le cas le plus simple est celui d'un seul nucléon dans le potentiel moyen de tous les autres, supposé central.

Nous supposons que ce cucléon obéit aux équations de Dirac rigoureusement Relativistes : il y a un self-couplage spin-orbite (qui est négligeable lorsque $\frac{v}{c} \ll 1$).

En réalité, les équations de Dirac que nous avons écrites au (I) § II, doivent être complétées par un terme tenant compte du moment magnétique "anormal" du nucléon. Des équations (1) résulterait le moment magnétique normal $\begin{cases} \mu_0 = \frac{e\hbar}{2Mc} & \text{pour le proton} \\ 0 & \text{pour le neutron} \end{cases}$

(μ_0 est le petit magnéton de Bohr).

L'expérience indique un moment magnétique : $\mu_n \mu_0 \neq 0$ pour le neutron, $\mu_p \mu_0$ avec $\mu_p \neq 1$ pour le proton.

Les moments magnétiques anormaux sont :

$\mu_n \mu_0$ pour le neutron, $(\mu_p - 1)\mu_0$ pour le proton.

Dans un champ magnétique H, il en résulte pour un nucléon immobile, le terme additif :

$\frac{1}{2} g \mu_0 \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{H}$ dans l'Hamiltonien.

g facteur de Landé $= \begin{cases} 2\mu_n & \text{pour le neutron} \\ 2(\mu_p - 1) & \text{pour le proton} \end{cases}$

$-\frac{1}{2} g \mu_0 \beta \vec{\sigma}$ représentant le moment magnétique anormal.

...

Si le nucléon est en mouvement, il en résulte, à cause de l'invariance Relativiste, le terme de couplage suivant avec le champ électromagnétique:

$$\frac{1}{2} g \mu_0 \left(\beta \vec{\sigma} . \vec{H} - i \beta \vec{\alpha} . \vec{E} \right)$$

Nous supposons avoir ici un champ électrique central

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{r}}{r} E(r) = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{dV}{dr} \qquad \text{et} \quad \vec{H} = 0 \qquad \text{d'où :}$$

$$-\frac{1}{2} g \mu_0 i \beta \vec{\alpha} . \vec{E} = \frac{1}{2} g \mu_0 i \left(\beta \vec{\alpha} . \vec{r} \right) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

Ce terme ajouté à l'Hamiltonien de Dirac, <u>ne change que les facteurs radiaux</u> des solutions (4-§11); $\beta \vec{\alpha} . \vec{r}$ se comportant comme $\vec{\sigma} . \vec{p}$, qui figure dans (1), au point de vue des rotations.

Nous devons former $\overline{\Psi_f} \beta \vec{\sigma} \Psi_i$, $\overline{\Psi_f} \beta \vec{\alpha} \Psi_i$ en considérant pour Ψ_i et Ψ_f les solutions de type (a) $J = L + \frac{1}{2}$, et (ℓ) $J = L - \frac{1}{2}$, correspondant aux 2 états de spin pour un même état orbital.

<u>Nous poserons ici $\Psi_f = \Psi$ et $\Psi_i = \Phi$</u>

1°- <u>Terme $\beta \vec{\sigma}$</u>

$$\begin{cases} \overline{\Psi} \beta \left(\sigma_x - i \sigma_y \right) \Phi = 2 \left(\overline{\Psi_2} \Phi_1 - \overline{\Psi_4} \Phi_3 \right) \\ \overline{\Psi} \beta \left(\sigma_x + i \sigma_y \right) \Phi = 2 \left(\overline{\Psi_1} \Phi_2 - \overline{\Psi_3} \Phi_4 \right) \\ \overline{\Psi} \beta \sigma_z \Phi = \overline{\Psi_1} \Phi_1 - \overline{\Psi_2} \Phi_2 - \overline{\Psi_3} \Phi_3 + \overline{\Psi_4} \Phi_4 \end{cases}$$

a) <u>Ψ et Φ de même type</u> $\quad J = \left\{ \begin{matrix} L+\frac{1}{2} & \longleftrightarrow & L'+\frac{1}{2} \\ L-\frac{1}{2} & & L'-\frac{1}{2} \end{matrix} \right\} = J'$

<u>$J'-J = L'-L$ (+)</u>

Nous écrivons seulement les indices des fonctions de Laplace qui interviennent, n'ayant pas à utiliser les expressions complètes.

$$\overline{\Psi_2} \Phi_1 - \overline{\Psi_4} \Phi_3 \sim \left(J'+\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2} \right) \left(J+\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2} \right) + \left(J'-\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2} \right) \left(J-\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2} \right)$$

$$\overline{\Psi_1} \Phi_2 - \overline{\Psi_3} \Phi_4 \sim \left(J'+\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2} \right) \left(J+\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2} \right) + \left(J'-\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2} \right) \left(J-\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2} \right)$$

$$\overline{\Psi} \beta \sigma_z \Phi \sim \begin{cases} \left(J'+\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2} \right) \left(J+\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2} \right) + \left(J'+\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2} \right) \left(J+\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2} \right) \\ + \left(J'-\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2} \right) \left(J-\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2} \right) + \left(J'-\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2} \right) \left(J-\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2} \right) \end{cases}$$

...

(+) On a toujours $\frac{v}{c} < 1$ même si $\frac{v}{c} \approx 1$; il y a donc toujours des composantes de ψ, ϕ c plus grandes qui définissent L, L'.

Les termes prédominants correspondent à L, L' sont les derniers écrits (soulignés) si $J = L + \frac{1}{2}$, $J' = L' + \frac{1}{2}$,
les premiers si : $J = L - \frac{1}{2}$, $J' = L' - \frac{1}{2}$

Soient ℓ, ℓ' les indices correspondant aux termes les plus petits. Nous avons ici : $\ell' - \ell = L' - L = J' - J$, et pour $\Delta L = n$, les 2 termes donnent une contribution $\neq 0$ à $\int \beta \vec{\sigma}$:

$\int \rho \vec{\sigma} \, Y_n \neq 0$

$\frac{v}{c} \ll 1$: la contribution des petits termes est négligeable

$\frac{v}{c} \approx 1$: les 2 contributions sont du même ordre.

b) Ψ et Φ de types différents : $J = \begin{pmatrix} L + \frac{1}{2} \longleftrightarrow L' - \frac{1}{2} \\ \\ L - \frac{1}{2} \quad L' + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = J'$

$J' - J = L' - L \pm 1$

$$\overline{\Psi_2}\,\Phi_1 - \overline{\Psi_4}\,\Phi_3 \sim \underline{\left(J'+\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right) + \left(J'-\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right)}$$

$$\overline{\Psi_1}\,\Phi_2 - \overline{\Psi_3}\,\Phi_4 \sim \underline{\left(J'+\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right) + \left(J'-\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right)}$$

$$\overline{\Psi}\,\beta\sigma_\delta\,\Phi \sim \left(J'+\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right) + \left(J'+\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\underline{+\left(J'-\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right) + \left(J'-\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right)}$$

Les termes prédominants sont les derniers écrits ou les premiers, suivant que : $J = L - \frac{1}{2}$, $J' = L' + \frac{1}{2}$

ou : $J = L + \frac{1}{2}$, $J' = L' - \frac{1}{2}$

Alors : $L' - L = J' - J \mp 1$

$' - = J' - J \pm 1 = L' - L \pm 2$

Nous pouvons supposer $L' > L$: $L' - L = \Delta L = n$.

Si nous considérons la suite des intégrales : $\int \overline{\Psi_L}\, Y_p\, \Psi_L$

avec $p = 1, 2 \ldots\ldots$, la 1re non nulle, est, par hypothès

$\int \overline{\Psi_L}\, Y_n\, \Psi_L$

Les termes prédominants correspondent à L, L' sont les derniers écrits (soulignés) si $J = L + \frac{1}{2}$, $J' = L' + \frac{1}{2}$,
les premiers si : $J = L - \frac{1}{2}$, $J' = L' - \frac{1}{2}$

Soient ℓ, ℓ' les indices correspondant aux termes les plus petits. Nous avons ici : $\ell' - \ell = L' - L = J' - J$, et pour $\Delta L = n$, les 2 termes donnent une contribution $\neq 0$ à $\iint \beta \vec{\sigma}$:

$\int \beta \vec{\sigma} \, Y_n \neq 0$

$\frac{v}{c} \ll 1$: la contribution des petits termes est négligeable

$\frac{v}{c} \approx 1$: les 2 contributions sont du même ordre.

b) Ψ et Φ de types différents : $J = \begin{cases} L + \frac{1}{2} \longleftrightarrow L' - \frac{1}{2} \\ L - \frac{1}{2} \quad L' + \frac{1}{2} \end{cases} = J'$

$J' - J = L' - L \pm 1$

$$\overline{\Psi_2}\,\Phi_1 - \overline{\Psi_4}\,\Phi_3 \sim \left(J'+\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right) + \left(J'-\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\overline{\Psi_1}\,\Phi_2 - \overline{\Psi_3}\,\Phi_4 \sim \left(J'+\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right) + \left(J'-\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\overline{\Psi}\,\beta\sigma_3\,\Phi \sim \left(J'+\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right) + \left(J'+\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$+ \left(J'-\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right) + \left(J'-\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right)$$

Les termes prédominants sont les derniers écrits ou les premiers, suivant que : $J = L - \frac{1}{2}$, $J' = L' + \frac{1}{2}$

ou : $J = L + \frac{1}{2}$, $J' = L' - \frac{1}{2}$

Alors : $L' - L = J' - J \mp 1$

$' - = J' - J \pm 1 = L' - L \pm 2$

Nous pouvons supposer $L' > L$: $L' - L = \Delta L = n$.

Si nous considérons la suite des intégrales : $\int \overline{\Psi_L}\, Y_p\, \Psi_L$ avec $p = 1, 2 \ldots\ldots$, la 1re non nulle, est, par hypothès

$\int \overline{\Psi_L}\, Y_n\, \Psi_L$

ce qui nous conduit à $\int (\beta \vec{\sigma})_L$ d'ordre n, pour la contribution des grandes composantes. Pour $\int \overline{\psi_{e'}} \gamma_\mu \psi_e$ la 1re non nulle sera $\int \overline{\psi_{e'}} \gamma_{5e} \psi_e$ ce qui conduit à la contribution $\int (\beta \vec{\sigma})_e$ d'ordre ≥ 4 pour les petites composantes.

Si $\Delta \ell \geq$ n, notre classification restera donc valable

$n = 0$ $\quad \ell' - \ell = \pm 2 \quad \Delta \ell = 2$

$n = 1$ $\quad \ell' - \ell = -\begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \quad \Delta \ell = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

$n = 2$ $\quad \ell' - \ell = \begin{cases} 0 \\ \\ 4 \end{cases} \quad \Delta \ell = \begin{cases} 0 \\ \\ 4 \end{cases}$

Une difficulté se présente donc à partir de n = 2 : on peut avoir $\Delta \ell < n$: $\Delta \ell = n-2$

Ceci se produit pour $J = L + \frac{1}{2}$, $J' = L' - \frac{1}{2}$

$\ell = L + 1 \quad \ell' = L' - 1$

$\ell' - \ell = n-2 \qquad J' - J = n-1,$

alors que $J = L - \frac{1}{2}$, $J' = L' + \frac{1}{2}$ conduit à $\begin{cases} \ell' - \ell = n + 2 \\ J' - J = n + 1 \end{cases}$

$= L - 1 \qquad = L' + 1$

I - Si $\frac{v}{c} \ll 1$, l'ordre de $\int (\beta \vec{\sigma})_e$ qui contient le produit de 2 petites composantes (donc $\frac{v^2}{c^2}$) est en réalité $\Delta \ell + 2$

$\Delta \ell + 2 = n$ lorsque $\Delta \ell = n-2$, et notre classification reste entièrement valable.

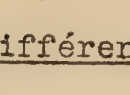
2 - Si $\frac{v}{c} \approx 1$, pour $\Delta L = n$, $\Delta J = n - 1$, $\int (\beta \vec{\sigma})_e$ est en réalité d'ordre $\Delta \ell = n-2 = n'$.

En résumé, nous avons :

a) <u>Ψ et Φ de même type</u> $\quad \updownarrow_p \Longleftrightarrow \updownarrow_n \quad$ <u>$\Delta J = \Delta L = n$</u>

ΔL	k	ΔJ	Elément de matrice	
n	n-1			
	n	n	G''_n	(I)
	n+1	n	G_{n+1}	

...

b) Ψ et Φ de types différents  $\Delta J = n \pm 1$ $(n \geq 1)$

ΔL	k	ΔJ	Elément de matrice
n	n-1	n-1	F_{n-1}
	n	n-1	G''_n
	n+1	n-1, n+1	G_{n+1}

(2)

Dans ce dernier cas, si $\underline{v} \approx 1$ et $\Delta J = n-1$, l'ordre est donné par $\underline{n'}$ comme pour $\Delta L = n'$, $\Delta J = n'+1 = n-1$

Ceci nous conduit à supprimer la contribution $J=n-1$ pour l'ordre d'interdiction n, comme dans le tableau de Greuling : l'ordre est donné par ΔL ou $\Delta \ell$ indifféremment, qui n'ont plus de signification physique, ΔJ seul en ayant une.

2°- Terme $\beta \vec{\alpha}$

$$\overline{\Psi}\beta(\alpha_1 - i\alpha_2)\Phi = 2\left(\overline{\Psi_2}\Phi_3 - \overline{\Psi_4}\Phi_1\right)$$
$$\overline{\Psi}\beta(\alpha_1 + i\alpha_2)\Phi = 2\left(\overline{\Psi_1}\Phi_4 - \overline{\Psi_3}\Phi_2\right)$$
$$\overline{\Psi}\beta\alpha_3\Phi = \overline{\Psi_1}\Phi_3 - \overline{\Psi_2}\Phi_4 - \overline{\Psi_3}\Phi_1 + \overline{\Psi_4}\Phi_2$$

a) Ψ et Φ de même type $\Delta J = \Delta L$

$$\overline{\Psi_2}\Phi_3 - \overline{\Psi_4}\Phi_1 \sim \left(\overline{J+\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right) + \left(\overline{J'-\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\overline{\Psi_1}\Phi_4 - \overline{\Psi_3}\Phi_2 \sim \left(\overline{J+\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right) + \left(\overline{J'-\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\overline{\Psi}\beta\alpha_3\Phi \sim \left\{\left(\overline{J'+\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right) + \left(\overline{J'+\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\overline{J'-\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right) + \left(\overline{J'-\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right)\right.$$

Ici, dans les 2 hypothèses, les Iers et 2èmes termes sont du même ordre (produit d'une petite composante par une grande)

La différence des indices des fonctions de Laplace est:

$J'-J-1 = \Delta L-1 = n-1 = \Delta\ell - 1$ pour les 2èmes termes

$J'-J+1 = \Delta L+1 = n+1 = \Delta\ell + 1$ pour les Iers termes.

...

$\int \beta\vec{\alpha}\, Y_{n-1}$ donne les termes principaux : $G'_n, (E'''+F''')_{n-1}$ tandis que les termes associés à $\int \beta\vec{\alpha}\, . Y_{n+1}$: $G'_{n+2}, (E'''+F''')_{n+1}$ sont du 2ème ordre par rapport aux précédents.

En réalité , comme $\Delta J = n \leqslant k$, G'''_{n-1} doit être exclu.

ΔL	k	ΔJ	Eléments de matrice	
	n-1			
n	n	n	G'_n	(3)
	n+1			

b) <u>Ψ et Φ de types différents</u> : <u>$J'-J=L'-L\pm1$</u>

$$\overline{\mathcal{F}_2}\,\Phi_3 - \overline{\mathcal{F}_4}\,\Phi_1 \sim \left(\overline{J'+\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right) + \left(\overline{J'-\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\overline{\mathcal{F}_1}\,\Phi_4 - \overline{\mathcal{F}_3}\,\Phi_2 \sim \left(\overline{J'+\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right) + \left(\overline{J'-\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\overline{\mathcal{F}}_{\beta\alpha_3}\,\Phi \sim \begin{cases} \left(\overline{J'+\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right) + \left(\overline{J'+\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}}\right)\left(J+\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right) \\ + \left(\overline{J'-\tfrac{1}{2}, M'-\tfrac{1}{2}}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M-\tfrac{1}{2}\right) + \left(\overline{J'-\tfrac{1}{2}, M'+\tfrac{1}{2}}\right)\left(J-\tfrac{1}{2}, M+\tfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

La différence des indices ℓ des fonctions de Laplace est ici, pour les 2èmes comme les Iers termes :

$J'-J= L'-L \pm1 = n\pm1$

Comme on l'a vu : $J'-J = n-1 \longleftrightarrow \ell'-\ell = n-2$

$J'-J = n+1 \longleftrightarrow \ell'-\ell = n+2$

$\int \beta\vec{\alpha}\, . Y_{n-1}$ donne encore les termes principaux : G'_n, $E'''_{n-1}+F'''_{n-1}$

$\int \beta\vec{\alpha}\, . Y_{n+1}$ donnerait des termes qui se retrouvent pour $\Delta L = n+2$ de 2 ordres supérieurs.

ΔL	k	ΔJ	Eléments de matrice	
	n-1	n-1	$E'''_{n-1} + F'''_{n-1}$	
n	n	n-1	G'_n	(3)
	n+1			

...

Pour $\int \beta \vec{\alpha}$ nous avons les mêmes résultats avec $\frac{v}{c} \ll 1$ et $\frac{v}{c} \approx 1$. Cela tient au fait que $\frac{v}{c}$ est, en somme, toujours contenu en facteur dans $\int \beta \vec{\alpha}$

Mais, si $\frac{v}{c} \approx 1$ $\left| \int \beta \vec{\alpha} \right| \approx \left| \int \beta \vec{\tau} \right|$ et nous ne devons plus admettre que $\int \beta \vec{\alpha}$ est du Ier ordre par rapport à $\int \beta \vec{\tau}$

En conclusion :

I - Si $\frac{v}{c} \ll 1$, en regroupant les résultats (I),(2),(3),(4), nous obtenons le tableau (5) identique à (4) du § 2I3 (on a ici $S = S' = \frac{1}{2} \longrightarrow S + S' = 1$).

ΔL	ΔJ	Probabilité	k
n	n - 1	$\left\|G''_{n-1}\right\|^2 + \left\|G''_n + G'_n\right\|^2 + \left\|G_{n+1}\right\|^2$	n-1, n, n+1
	n	$\left\|G''_n + G'_n\right\|^2 + \left\|G_{n+1}\right\|^2$	n, n+1 (5)
	n + 1	$\left\|G_{n+1}\right\|^2$	n+1

2 - Si $\frac{v}{c} \approx 1$, nous classerons d'abord séparément les termes correspondants à $\int \beta \vec{\sigma}$ et $\int \beta \vec{\alpha}$

Ordre d'interdiction	ΔJ	Probabilité	k
n	n	$\left\|G''_n\right\|^2 + \left\|G_{n+1}\right\|^2$	n, n+1
	n+1	$\left\|G_{n+1}\right\|^2$	n+1 (6)

ΔL	ΔJ	Probabilité	k
n	n-1	$\left\|E'''_{n-1} + F'''_{n-1}\right\|^2 + \left\|G'_n\right\|^2$	n-1, n (7)
	n	$\left\|G'_n\right\|^2$	n

Or, pour $\int \beta \vec{\alpha}$, lorsque $\Delta L = n$, l'ordre est en réalité $n' = n-1$, si l'on admet que $\int \beta \vec{\alpha} \approx \int \beta \vec{\sigma}$, d'où, en fonction de l'ordre d'interdiction n' :

Ordre d'interdiction	ΔJ	Probabilité
n'	n'	$\left\|E'''_{n'} + F'''_{n'}\right\|^2 + \left\|G''_{n'}\right\|^2 + \left\|G'_{n'+1}\right\|^2 + \left\|G_{n'+1}\right\|^2$
	n'+1	$\left\|G'_{n'+1}\right\|^2 + \left\|G_{n'+1}\right\|^2$

...

Nous retrouvons, comme il fallait s'y attendre,(+) un tableau analogue à celui de Greuling, mais l'expression des probabilités de transition se trouve modifiée parce que le facteur $\frac{v}{c}$ du couplage spin-orbite est justement égal au rapport $\left|\frac{\int \beta \vec{\alpha}}{\int \beta \vec{\sigma}}\right|$

$|G_{n'+1}|^2$ et $|G'_{n'+1}|^2$ contiennent les mêmes facteurs radiaux leptoniques.

ainsi que : $|G''_{n'}|^2$ et $|E''_{n'} + F''_{n'}|^2$; les expressions sont donc ici plus simples que les expressions générales de Greuling.

222- Les calculs précédents, relatifs à un seul nucléon, s'étendent immédiatement au cas de A nucléons occupant A états individuels (chaque état est occupé par un seul nucléon, d'après le principe de Pauli). Ces états sont représentés par les fonctions d'onde $\varphi^{(1)}, \ldots\ldots, \varphi^{(A)}$, dont nous supposerons qu'elles sont solutions des équations de Dirac dans un potentiel central moyen.

Les $\varphi^{(a)}$ diffèrent par :

les nombres quantiques d'espace L et N, ou par le spin : solution $J = L + \frac{1}{2}$ ou $J = L - \frac{1}{2}$, ou par la charge du nucléon. Nous désignerons par φ_p celles qui correspondent à un état proton, φ_n à un état neutron.

La fonction d'onde du noyau est le déterminant de Slater:

$$\Psi(1, \ldots, A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \varphi_p^{(1)}(1) & \cdots & \varphi_p^{(2)}(1) & \cdots & \varphi_n^{(A)}(1) \\ \vdots & & & & \\ \varphi_p^{(1)}(A) & \cdots & \varphi_p^{(2)}(A) & \cdots & \varphi_n^{(A)}(A) \end{vmatrix}$$

$n\varphi(1)$ est écrit pour $\varphi(X_1) \ldots\ldots \varphi(A)$ pour $\varphi(X_A)$

...

(+) L et ℓ n'ont pas ici même parité, mais ΔL et $\Delta \ell = \begin{cases} \Delta L \\ \Delta L \pm 2 \end{cases}$ ont bien la même.

où les Z Ières fonctions représentent les états protons.

Après la transition β , la fonction d'onde est :

$$\Psi(1,\ldots,A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \varphi^{(1)}(1) & \cdots & \varphi^{(A)}(1) \\ \vdots & & \\ \varphi^{(1)}(A) & \cdots & \varphi^{(A)}(A) \end{vmatrix}$$

où certains $\varphi^{(a)}$ peuvent être identiques aux $\varphi^{(a)}$

Pour une transition β^+ par exemple :

$$\pi^+_{(1)}\,\Phi = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \phi_n^{(1)}(1) & \cdots & \phi_n^{(2)}(1) & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_p^{(1)}(1) & \cdots & \phi_p^{(2)}(2) & \phi_n^{(2+1)}(2) & \cdots & \phi_n^{(A)}(2) \\ \vdots & & & & & \\ \phi_p^{(1)}(A) & \cdots & \phi_p^{(2)}(A) & \phi_n^{(2+1)}(A) & \cdots & \phi_n^{(A)}(A) \end{vmatrix}$$

On trouve alors que : $\int \overline{\Psi}(X_1 \ldots X_A)\, \Omega(X_1)\, \Phi(X_1 \ldots X_A)\, dX_1 \ldots dX_A$

diffère de zéro seulement si une des Z premières colonnes de Φ soit $\phi_p^{(r)}(1)$ est remplacée par $\phi_n^{(r)}(1)$

$\vdots$ $\vdots$

$\phi_p^{(r)}(A)$ $\phi_n^{(1)}(A)$

c'est-à-dire un état proton par un état neutron.

Nous avons posé $\Omega(X_1) = \Omega_N \cdot \overline{\varphi}(X_1)\, \Omega_e\, \varphi(X_1)$

On obtient ce résultat en développant les déterminants $\pi^+_{(1)}\,\Phi$ et Ψ suivant les éléments de la Ière ligne.

$$\sqrt{A!}\;\pi^+_{(1)}\,\Phi = \phi_n^{(1)}(1)\, D_{11} + \phi_n^{(2)}(1)\, D_{12} + \cdots + \phi_n^{(2)}(1)\, D_{1Z}$$

$$\sqrt{A!}\;\Psi = \varphi^{(1)}(1)\,\Delta_{11} + \varphi^{(2)}(1)\,\Delta_{12} + \cdots + \varphi^{(2)}(1)\,\Delta_{1Z} + \cdots + \varphi^{(A)}(A)\,\Delta$$

où les D, Δ sont égaux (au signe près) aux mineures de $\pi^+_{(1)}\Phi$ et Ψ, et sont fonctions de $X_2, \ldots, X_A$

$$\int \Psi\, \pi^+_{(1)}\, \Omega(X_1)\, \Phi\, dX_1 \ldots dX_A = \frac{1}{A!} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{A} \int \overline{\varphi^{(i)}}(1)\, \Omega(1)\, \phi_n^{(r)}(1)\, dX_1 \cdot \int D_{ir}\, \overline{\Delta}_{ij}\, dX_2 \ldots dX_A \quad \text{(I)}$$

...

où tous les termes sont nuls sauf celui où l'on aurait $D_{1r} \equiv \Delta_{11}$ à cause de l'orthogonalité des différents $\varphi^{(r)}$ et $\varphi^{(s)}$

Il existe un $D_{1r} \equiv \Delta_{1s}$ si $\pi^{+}_{(1)} \Phi$ et Ψ ont leurs lignes et colonnes identiques sauf :
la Ière ligne et la r^{me} colonne de $\pi^{+}_{(1)} \Phi$
la Ière ligne et la s^{me} colonne de Ψ

Donc la r^{me} colonne de Φ (une des Z premières) est supprimée dans Φ et remplacée par une s^{me} colonne d'états neutrons car : $\int \overline{\varphi^{(s)}(1)}\, \Omega(1)\, \varphi_n^{(r)}(1)\, dX_1$ serait nul si $\varphi^{(s)}$ était un état proton. On peut prendre $s = r$, en changeant éventuellement l'ordre des colonnes dans Φ ou Ψ.

De même, on peut échanger les lignes 1 et a dans Φ et Ψ et l'on obtient :

$$\int \overline{\Psi}\, \pi^{+}_{(a)}\, \Omega(X_a)\, \Phi\, dX_1 \ldots dX_A = \int \overline{\Psi}\, \pi^{+}_{(1)}\, \Omega(X_1)\, \Phi\, dX_1 \ldots dX_A$$

Tous ces résultats résultant de l'antisymétrie de Ψ et Φ, traduite par la représentation en déterminants.

Ψ ayant la structure indiquée, nous devons prendre :

$$\sum_a \int \overline{\Psi}\, \pi^{+}_{(a)}\, \Omega(X_a)\, \Phi\, dX_1 \ldots dX_A = A \int \overline{\Psi}\, \pi^{+}_{(1)}\, \Omega(X_1)\, \Phi\, dX_1 \ldots dX_A$$

ou $\dfrac{A}{A!} \int \overline{\varphi_n^{(r)}(1)}\, \Omega(1)\, \varphi_n^{(r)}(1)\, dX_1 \int \overline{D_{1r}}\, D_{1r}\, dX_2 \ldots dX_A$ d'après (1)

Comme : $\int \overline{\varphi^{(a)}(X_\sigma)}\, \varphi^{(a)}(X_\sigma)\, dX_\sigma = 1$ pour $\sigma = 2, \ldots, A$

$$\int \overline{D_{1r}}\, D_{1r}\, dX_2 \ldots dX_A = (A-1)!$$

$$H' = \sum_a \int \overline{\Psi}\, \pi^{+}_{(a)}\, \Omega(a)\, \Phi\, dX_1 \ldots dX_A = \int \psi_n^{(r)}(X)\, \pi^{+}\, \Omega(X)\, \varphi_p^{(a)}(X)\, dX$$

Nous sommes ramenés au cas d'un seul nucléon, (ou plutôt d'un seul état (+) initial).

...

(+) Seuls les états nucléoniques sont discernables; les nucléons sont indiscernables: on doit considérer qu'ils s'échangent continuellement entre les différents états.

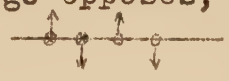
L'ordre d'interdiction et la probabilité de transition résultent de ΔJ, ΔL dans la transition $\varphi_p^{(r)} \rightarrow \varphi_n^{(s)}$ parce qu'il n'y a pas de couplage réel entre l'état r et les autres. En fait, lorsqu'on tient compte des intéractions entre nucléons, on peut considérer que $\Phi(\chi_1 \ldots \chi_A)$ du noyau résulte de la superposition d'états ${}^{\sigma}\Phi(\chi_1 \ldots \chi_A)$ représentés par des déterminants de Slater différents :

$$\Phi = \sum_{\sigma} c_{\sigma}\, {}^{\sigma}\Phi \qquad \text{avec} \quad \sum_{\sigma} |c_{\sigma}|^2 = 1$$

Il y a une valeur de J commune (résultant de $J_1^{\sigma} \ldots J_A^{\sigma}$ pour chaque état σ), mais une valeur de L seulement dans l'hypothèse Russell-Saunders. Divers auteurs ont essayé de calculer les valeurs des c_{σ} par des méthodes de perturbation (Hartree, etc...) mais elles se sont révélées peu efficaces pour les noyaux, états condensés.

Il semblerait, d'après ce qui précède, que la probabilité de transition augmente avec le nombre Z d'états protons (transition β^+) ou le nombre N d'états neutrons (transition β^-) Mais le raisonnement suivant montre qu'il n'en est rien.

Si nous ne distinguons pas les états d'espace des neutrons et des protons (approximation de Wigner), il y a 4 nucléons, dans des états de spin ou de charge opposés, sur chaque niveau saturé.



(1)

Si l'un de ces nucléons subissait une transition β, il ne pourrait rester sur son niveau, à cause du principe d'exclusion, et devrait passer sur un niveau inférieur non saturé. Ceci est en général impossible : le noyau radioactif étant dans son état fondamental, les niveaux profonds sont nécessairement saturés (il n'y aurait d'exception que pour un isomère de longue période radioactif β).

Seuls les nucléons des niveaux non saturés interviennent donc dans le processus.

On peut donc, en général, considérer un seul nucléon ou un système de 2 ou 3 nucléons subissant la transition, dans ce modèle.

(2)

...

Si l'on tient compte de l'action Coulombienne, les niveaux de neutrons et de protons sont dédoublés : il y a 2 nucléons de spins opposés sur chaque niveau simple. (fig (2))

Le raisonnement précédent reste valable si le dédoublement est faible (inférieur à l'intervalle des niveaux).

Or, s'il tend à augmenter quand $\geq Z$ augmente, l'intéraction neutron-proton tend à diminuer cet effet.

3- Classification avec les autres formes d'intéraction.-

On peut classer de même les transitions interdites en admettant que l'intéraction nucléons-leptons a l'une des 4 autres formes possibles S,V,A,P, (§ I3).

Dans les facteurs leptoniques, les Y_n d'indices croissants sont toujours associés aux facteurs radiaux d'ordre croissant(correspondance avec la méthode tensorielle) et L est lié à n lorsqu'il est défini.

I°- Forme A.-

Le terme grand en $\vec{\sigma}$ est tout à fait analogue à $\beta\vec{\sigma}$ de T. Il donne :

ordre n	$\Delta L = n$		
		$\Delta J = n-1$	$F_{n-1}, {}^{A}G''_n, G_{n+1}$
		$\Delta J = n$	${}^{A}G''_n, G_{n+1}$
		$\Delta J = n+1$	G_{n+1}

Le terme en $-\gamma_5 = i\,\frac{\alpha.\vec{\sigma}^{(+)}}{3}$ se comporte comme $\frac{1}{3}\int Y_1^{-1}\sigma_+ + Y_1^{1}\sigma_- + Y_1^{0}\sigma_3$ au point de vue des rotations et des symétries. Il donne donc :

ordre n	$\Delta L = n$		
		$\Delta J = n-1$	${}^{A}G'''_{n-1}$, ${}^{A}G'_n$ (analogues à G'''_{n-1}, G'_n)
		$\Delta J = n$	${}^{A}G'_n \equiv 0$

Ici, ${}^{A}G'_n \sim \int Y_{n-1}\,\overline{\Psi_{J'}}\,\frac{\alpha\vec{\sigma}}{3}\,\Psi_J \neq 0$ si $J - J' \leq n-1$

Au total, on a donc une classification analogue à (7) du § 2I3.

ordre n	$\Delta L = n$		
		$\Delta J = n-1$	$\lvert {}^{A}G'''_{n-1}\rvert^2 + \lvert {}^{A}G''_n + {}^{A}G'_n\rvert^2 + \lvert G_{n+1}\rvert^2$
		$\Delta J = n$	$\lvert {}^{A}G''_n\rvert^2 + \lvert G_{n+1}\rvert^2$
		$\Delta J = n+1$	$\lvert G_{n+1}\rvert^2$

(+) $\alpha_1\sigma_1 = \alpha_2\sigma_2 = \alpha_3\sigma_3 = i\gamma_5$

2° - Forme V.-

Le grand terme $\int 1$ donne :

Ordre n $\quad \Delta L = n \quad \begin{cases} \Delta J = n-1 & V_{F_{n-1}}, V_{G''_n}, V_{G_{n+1}} \\ \Delta J = n & V_{G''_n}, V_{G_{n+1}} \\ \Delta J = n+1 & V_{G_{n+1}} \equiv 0 \end{cases}$

Ici $V_{G_{n+1}} \sim \int \gamma_n \overline{\gamma_{J'}} \gamma_J \neq 0$ pour $J-J' \leqslant n$ $V_{G''_n}$ aussi.

Le terme $-\int \vec{\alpha}$ est tout à fait analogue à $\int \beta \vec{\alpha}$ de T; il donne :

Ordre n $\quad \Delta L = n \quad \begin{cases} \Delta J = n-1 & V_{G'''_{n-1}}, V_{G'_n} \\ \Delta J = n & V_{G'_n} \end{cases}$

Au total :

Ordre n $\quad \Delta L = n \quad \begin{cases} \Delta J = n-1 & |V_{G'''_{n-1}}|^2 + |V_{G''_n} V_{G'_n}|^2 + |V_{G_{n+1}}|^2 \\ \Delta J = n & |V_{G''_n} + V_{G'_n}|^2 + |V_{G_{n+1}}|^2 \end{cases}$

L'existence de transitions certainement permises avec $\Delta J = 1$ (n=0 et $\Delta J = n+1$) conduit à rejeter cette forme d'intéraction, ou un mélange où elle serait prédominante.

3°- Forme S.-

Ordre n $\quad \Delta L = n \quad \begin{cases} \Delta J = n-1 & S_{F_{n-1}}, S_{G_{n+1}}, S_{G''_n} \\ \Delta J = n & S_{G''_n}, S_{G_{n+1}} \\ \Delta J = n+1 & S_{G_{n+1}} \equiv 0 \end{cases}$

Les S_G se comportant comme les V_G (invariant d'espace).

Un mélange où cette forme serait prédominante est donc aussi exclu.

4°- Forme P.-

$\int \beta \gamma_5 = i \int \beta \frac{\vec{\alpha} \vec{\sigma}}{3}$. Les résultats sont analogues à ceux de $\int \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}}{3}$ forme A, mais si P est seule ou prédominante, pour $\Delta L = n$ l'ordre est n-1.

...

Ordre n $\quad \Delta L = n+1 \quad \begin{cases} \Delta J = n & P_{G'''_n},\ P_{G'_{n+1}} \\ \Delta J = n+1 & P_{G'_{n+1}} \equiv 0 \end{cases}$

La prédominance de cette forme est encore exclue. Si P entre dans un mélange où elle n'est pas prédominante (comme dans l'intéraction de Critchfield) on a, au contraire :

Ordre n $\quad \Delta L = n \quad \Delta J = n-1 \quad P_{G'''_{n-1}},\ P_{G'_n}$

CONCLUSIONS.-

1) En résumé, comme on l'a indiqué au § 133, on doit avoir une intéraction T ou A ou, au moins : C_T ou $C_A \gg C_S,\ C_V,\ C_P$, c'est-à-dire une intéraction où $\Delta J = n+1$ peut correspondre à l'ordre

Alors, il existe des transitions interdites d'ordre n ave $\Delta J = n$ ou $\Delta J = n+1$, quelles que soient les hypothèses sur le couplage spin-orbite.

2) Les transitions n interdites avec $\Delta J = n+1$ correspondent seulement aux termes T ou A. Nous verrons aux § 4 et 5 que $|G_{n+1}|^2$ est le même dans les 2 cas,

l'élément de matrice nucléaire étant $\int \beta \vec{\sigma}$ ou $-\int \vec{\sigma}$ pratiquement égaux.

Les transitions de ce type, comme les transitions permises, sont donc insensibles à l'intéraction choisie.

3) Les transitions n interdites avec $\Delta J = n$ en dépendent beaucoup au contraire.

L'intéraction A donne $|A G''_n|^2 + |G_{n+1}|^2$

" T " $|G'_n + G''_n|^2 + |G_{n+1}|^2$

la dernière expression renfermant plusieurs éléments de matrice nucléaire contient plus de paramètres ajustables par l'expérience. C'est le mélange T + V qui en contient le plus, tandis que A seule n'en contient pas.

Ce type de transition pourra donc servir à déterminer la forme d'intéraction par comparaison avec l'expérience, tandis que le précédent, comme les transitions permises, sert à vérifier la théorie en général (grâce à la forme du spectre et au rapport d'embranchement $\frac{\text{capture K}}{\text{émission } \beta^+}$ comme nous le verrons au § 4).

...

4) Enfin, les transitions n interdites avec $\Delta J \leq n-1$ n'existent que si l'on a, avec une assez grande approximation, un couplage R-S dans le noyau (cf. § 6 la discussion pour ^{14}C) On a vu en effet que si ΔL n'est pas défini $\Delta J = n-1 = (n-2)+1$ ne peut correspondre à l'ordre n.

Si l'expérience indiquait nettement cette possibilité, il faudrait admettre que ΔL est bien défini dans ce cas.

Par ailleurs, le terme prédominant $|G''_{n-1}|^2$ ne diffère que par un facteur, l'élément de matrice nucléaire, pour les intéractions T et A.

Ces transitions, si elles existent, peuvent donc donner des renseignements sur les couplages spin-orbite nucléaires.

4 - CALCUL DES PROBABILITES DE TRANSITION
(Intéraction T)

En général (mais en se limitant à S + S' ≤ 1), il faut calculer les termes :

$|G_{n+1}|^2 = |E_{n+1}|^2$ $\qquad k = n+1$

$|G''_n + G'_n|^2 = |(E''+F''+E')_n|^2$ $\qquad k = n$

$|G'''_{n-1}|^2 = |(E''+F'''+F)_{n-1}|^2$ $\qquad k = n-1$

Chacun d'eux est une somme multiple : $\sum_{j_1+j_2=k} \frac{1}{2J+1} \sum_{M\, m_1, m_2}$

Pour les transitions interdites d'ordre n avec $\Delta J = n+1$ on a le seul $|G_{n+1}|^2$. En particulier, le cas le plus simple est celui des transitions permises n = 0

4I- Transitions permises.-

$\Delta J = 0$ ou 1 $\qquad k = 1 \rightarrow j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$

$$P_i = |G_1|^2 = \frac{2\pi g^2}{2J+1} \sum_M \sum_{m_1 m_2} \left| \int \overline{\Psi}_f \beta \left[\frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}} \frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{\sqrt{2}} \frac{A_x - iA_y}{\sqrt{2}} + \sigma_z A_z \right] \Psi_i \, d\tau \right|^2$$

Toutes les valeurs possibles de M', pour M donné, sont obtenues en prenant toutes les valeurs de m_1, m_2 :

M-M' = $\mu = m_1 + m_2$ peut prendre les valeurs -1, 0, +1

En fait, d'après (1) § 2I2, où l'on a fait $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$:

$A + iA_y \neq 0$ seulement si $m_1 = m_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \mu = 1$

$A - iA_y \neq 0$ " " $m_1 = m_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow \mu = -1$

$A_z \neq 0$ " " $m_1 = -m_2 = \pm\frac{1}{2} \rightarrow \mu = 0$ (2 possibilités)

$$P_i = \frac{2\pi g^2}{2J+1} \sum_M \left[\left| \int \overline{\Psi}_f(M-1) \beta \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}} \Psi_i(M) \right|^2 + \left| \int \overline{\Psi}_f^{M+1} \beta \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{\sqrt{2}} \frac{A_x - iA_y}{\sqrt{2}} \Psi_i(M) \right|^2 \right.$$

$$\left. + 2 \left| \int \overline{\Psi}_f(M) \beta \sigma_z A_z \Psi_i(M) \right|^2 \right]$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y) = -\sqrt{2}\, Y_{00}^2 \left(g_v f_{-2}^v \text{ ou } f_{-2} g_v^v \right)$ pour $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y) = \sqrt{2}\, Y_{00}^2 \left(\text{—— id ——} \right)$ — $m_1 = m_2 = -\frac{1}{2}$

$A_z = Y_{00}^2 \left(\text{—— id ——} \right)$ — $m_1 = -m_2 = \pm\frac{1}{2}$

...

Y_{oo}^2 est écrit pour $(Y_o^o)^2$; f_{-2}^{ν} , g_o^{ν} sont relatives au neutrino d'après (3) § 2I2.

$$(f_{-2}^{\nu})^2 = (g_o^{\nu})^2 = \frac{g^2}{\pi}$$

$$P_1 = \frac{2\pi g^2}{2J+1} Y_{oo}^4 \frac{g^2}{\pi}(g_o^2+f_{-2}^2) \sum_M \left[\left| \int \bar{\psi}_f (M-1) \beta(\sigma_x - i\sigma_y) \psi_i \right|^2 + \left| \int \bar{\psi}_f (M+1) \beta(\sigma_x + i\sigma_y) \psi_i \right|^2 + 2 \left| \int \bar{\psi}_f (M) \beta \sigma_z \psi_i \right|^2 \right]$$

$Y_{oo} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ étant une constante ainsi que $g_o^2 + f_{-2}^2$, pris à la surface du noyau.

$$P_1 = \frac{g^2}{4\pi^2} g^2 (g_o^2 + f_{-2}^2) \frac{1}{2J+1} \sum_M |m|^2 \qquad (1)$$

où : $$|m|^2 = \left| \left(M \left| \beta \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}} \right| M-1\right) \right|^2 + \left| \left(M \left| \beta \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{\sqrt{2}} \right| M+1\right) \right|^2 + \left| \left(M \left| \beta \sigma_z \right| M\right) \right|^2$$

$\frac{1}{2J+1} \sum_M |m|^2$

ne dépend que du noyau : élément de matrice nucléaire.

Chaque élément de matrice $\left(M \left| \beta \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}} \right| M-1\right)$ etc... résulte d'une densité $\bar{\psi}_f (M-1) \beta \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}} \psi_i$, ... qui a le caractère d'une composante de vecteur. Cela résulte du fait que le champ de leptons intervient ici seulement par Y_{oo} , constante, dans $\int \beta \vec{\sigma}$
La théorie des groupes de rotation ([9] p.I52) permet alors de calculer les éléments de matrice en fonction de M; les mêmes formules interviennent en spectroscopie atomique.

On a le tableau suivant où les a et b ne dépendent que de J (éventuellement des autres nombres quantiques).

$$b^+(J, J+1) = \bar{b}(J+1, J)$$

(1^T)

Elément de matrice	J'=J-1	J' = J	J'= J+1
$\left(M \left\| \beta \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{\sqrt{2}} \right\| M+1\right)$	$b\sqrt{\frac{(J-M-1)(J-M)}{2}}$	$a\sqrt{\frac{(J+M+1)(J-M)}{2}}$	$-b^+\sqrt{\frac{(J+M+1)(J+M+2)}{2}}$
$\left(M \left\| \beta \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}} \right\| M-1\right)$	$-b\sqrt{\frac{(J+M-1)(J+M)}{2}}$	$a\sqrt{\frac{(J-M+1)(J+M)}{2}}$	$b^+\sqrt{\frac{(J-M+1)(J-M+2)}{2}}$
$\left(M \left\| \beta\sigma_z \right\| M\right)$	$-b\sqrt{(J+M)(J-M)}$	aM	$-b^+\sqrt{(J+M+1)(J-M+1)}$

...

Comme pour les spectres atomiques, on trouve d'après ces valeurs, que $|m|^2$ est en fait indépendant de M dans chacun des cas : J'-J = - 1,0,+1 [5]

$\frac{1}{2J+1}\sum_M |m|^2$ se réduit donc à $|m|^2$ pour M quelconque.

Si J'=J-1, on peut d'ailleurs réduire $|m|^2$ au seul terme $|m\hat{f}|^2$ - ou $|(M|\beta\frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}}|M-1)|^2$ en prenant M = J : $|m|^2 = |m_J|^2 = b^2 J(2J-1)$

Dans les autres cas, $|m|^2$ peut se réduire au mieux à 2 termes.

Cependant, pour J'= J+1, on peut réduire $|m|^2$ à un terme par la considération des transitions inverses J' M' $\longrightarrow$ J, M où J = J'-1, qui ont mêmes probabilités que les premières : P (J'M' $\longrightarrow$ JM) = P (JM $\longrightarrow$ J'M') résultant de l'Hermiticité des opérateurs.

$$\sum_{MM'} P(JM \to J'M') = (2J+1)\, P_1(J \to J') \qquad \left(\textstyle\sum_{M'} \text{ indépendant de } M\right)$$

$$\sum_{M'M} P(J'M' \to JM) = (2J'+1)\, P_1(J' \to J) \qquad \left(\textstyle\sum_{M} \text{ —— de } M'\right)$$

d'où : $$P_1(J \to J') = \frac{2J'+1}{2J+1} P_1(J' \to J)$$

où P_1 (J' $\longrightarrow$ J) se calcule avec un seul terme.

a) Emission β

$$g_0^2 + f_{-2}^2 = \frac{2}{\pi}\frac{1+\gamma_0}{2}\varepsilon p F_0(Z,\varepsilon) \qquad \text{(cf. appendice II-Eq.(3))}$$

avec :

$$F_0(Z,\varepsilon) = 4(2pR)^{2\gamma_0 - 2} e^{\frac{\pi\alpha Z\varepsilon}{p}} \left|\frac{\Gamma(\gamma_0 + i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p})}{\Gamma(2\gamma_0+1)}\right|^2 \quad \begin{cases} Z>0 & \text{pour } \beta^- \\ Z<0 & \text{— } \beta^+ \end{cases}$$

où $F_0 \longrightarrow 1$ quand $Z \longrightarrow 0$

D'où, d'après (1) :

$$P_1(\varepsilon) = \frac{g^2}{2\pi^3}|m|^2 \frac{1+\gamma_0}{2}\varepsilon p q^2 F_0(Z,\varepsilon) \qquad (2)$$

Formule de Fermi. ...

On peut en déduire la probabilité de transition totale par unité de temps :

$$f_1 = \frac{g^2}{2\pi^3} |m|^2 \frac{1+\gamma_0}{2} \int_1^{\varepsilon_0} \varepsilon p q^2 F_0(Z,\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad (3)$$

et la période T : $P_1 = \frac{\log 2}{f} = \frac{0{,}693}{f}$

On pose d'ailleurs : $\frac{g^2}{2\pi^3} = \frac{\log 2}{T_0}$

$$\frac{1}{T} = \frac{|m|^2}{T_0} \cdot \frac{1+\gamma_0}{2} \cdot \int_1^{\varepsilon_0} \varepsilon p q^2 F_0(Z,\varepsilon)\, d\varepsilon$$

Les périodes mesurées pour les noyaux légers (neutron, ^3_1H) conduisent à prendre $T_0 \approx$ 1000 sec.
(on admet alors que $|m| = 1$)

b) Capture K

Il est plus correct de parler de capture électronique car les transitions permises correspondent à la capture d'électrons S : $j_1 = \frac{1}{2}$, $\ell_1 = 0$ $(\ell_2 = 1)$ ou P : $j_1 = \frac{1}{2}$, $\ell_1 = 1$ $(\ell_2 = 0)$ quelle que soit la couche qu'ils occupent.

K	$n = 1$	$\ell = 0$	$j = \frac{1}{2}$	$m = \pm\frac{1}{2}$ (2 eléctrons)	
L	$n = 2$	$\ell = 0$	$j = \frac{1}{2}$	$m = \pm\frac{1}{2}$ (" ")	L_I
		$\ell = 1$	$j = \frac{1}{2}$	$m = \pm\frac{1}{2}$ (" ")	L_{II}
			$j = \frac{3}{2}$		

etc... en considérant tous les électrons de $j = \frac{1}{2}$ sur les couches M,N ...

La probabilité de capture est :

$$P_1^c = \frac{g^2}{4\pi^2} |m|^2 \sum_{n'} q^2 (g_{-1}^2 + f_{-1}^2) \qquad (4)$$

n' radial = $n - \ell + 1$ et $\sum$ étant prise pour n'=0 (couche K), n'=1 (L), etc...

q énergie emportée par le neutrino = $\varepsilon_0 + \varepsilon_e$

ε_0 libérée par la transition nucléaire

ε_e apportée par l'électron capturé = $\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{N^2}}$

Couche K $\quad q = \varepsilon_0 + \varepsilon_K \quad \varepsilon_K = \gamma_0 = \sqrt{1-\alpha^2 Z^2}$

" L $\quad q = \varepsilon_0 + \varepsilon_L \quad \varepsilon_L \# \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{4}}$

...

Pour chaque couche, il faut d'ailleurs corriger Z en introduisant des nombres d'écran z. Avec le système de Slater 20 (cf.App.II § IIb),

(5)

K $\quad Z_{eff} = Z - 0,30$

L $\quad Z_{eff} = Z - 2\times 0,85 - 7\times 0,35 = Z - 4,15$

Dans la formule générale (5) App.II nous devons faire ici r=0 $\longrightarrow$ r'=1 pour obtenir $g_0^2 + f_{-2}^2$

(6)

K $\quad n'=0 \qquad N = \sqrt{\gamma_0'^2 + \alpha^2 Z_K^2} = 1 \longrightarrow f_{r-2} = 0, \; (N - r - 1 + n' = 0)$

$$g_K^2 = \frac{1}{2\Gamma(2\gamma_0'+1)} (2\alpha Z_K)^3 (2\alpha Z_K R)^{2\gamma_0'-2} (1+\gamma_0') \qquad \gamma_0' = \sqrt{1-\alpha^2 Z_K^2}$$

L $\quad n'=1 \qquad N = \sqrt{(1+\gamma_0'')^2 + \alpha^2 Z_L^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+\gamma_0''}$

(7)

$$g_{L_I}^2 + f_{L_{II}}^2 = \frac{1}{\Gamma(2\gamma_0''+1)} \frac{1}{2N^2} \left(\frac{2\alpha Z_L}{N}\right)^3 \left(\frac{2\alpha Z_L R}{N}\right)^{2\gamma_0''-2} (1+\gamma_0'')(4\gamma_0''+3)$$

$$= \frac{1}{4\,\Gamma(2\gamma_0''+1)} \left(\frac{2\alpha Z_L}{\sqrt{2\gamma_0''+2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{2\alpha Z_L R}{\sqrt{2\gamma_0''+2}}\right)^{2\gamma_0''-2} (4\gamma_0''+3) \qquad \gamma_0'' = \sqrt{1-\alpha^2 Z_L^2}$$

La contribution à P_1^c des électrons de la couche K est : $\left[q^2 \left(g_0^2 + f_{-2}^2\right)\right]_K = \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_K\right)^2 g_K^2 \simeq \left(\varepsilon_0 + 1\right)^2 g_K^2$

Celle de la couche L est : $\left[q^2 \left(g_0^2 + f_{-2}^2\right)\right]_L = \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_L\right)^2 \left(g_{L_I}^2 + f_{L_{II}}^2\right)$

$$\simeq \left(\varepsilon_0 + 1\right)^2 \left(g_{L_I}^2 + f_{L_{II}}^2\right)$$

Si l'on suppose $Z_L \simeq Z_K$ ce qui est exact pour les éléments lourds : $g_{L_I}^2 + f_{L_{II}}^2 \sim \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} \times 7 \cdot g_K^2 < \frac{g_K^2}{4}$

La probabilité de capture L peut atteindre 22 % de la probabilité de capture K (soit 18 % de $P_K + P_L$) pour les éléments lourds.

Pour les électrons de la couche M :

(8)

M $\quad n'=2 \qquad N = \sqrt{(2+\gamma_0''')^2 + \alpha^2 Z_M^2} = \sqrt{5+4\gamma_0'''}$

$$g_{M_I}^2 + f_{M_{II}}^2 = \frac{\Gamma(2\gamma_0'''+2)}{\left[\Gamma(2\gamma_0'''+1)\right]^2 2!} \frac{1}{2(5+4\gamma_0''')} \left(\frac{2\alpha Z_M}{\sqrt{5+4\gamma_0'''}}\right)^3 \left(\frac{2\alpha Z_M R}{\sqrt{5+4\gamma_0'''}}\right)^{2\gamma_0'''-2} (2+\gamma_0''')\left[6(1+\gamma_0''')\right]$$

$$= \frac{2\gamma_0'''+1}{2\Gamma(2\gamma_0'''+1)} \cdot \frac{3(1+\gamma_0''')(2+\gamma_0''')}{5+4\gamma_0'''} \cdot \left(\frac{2\alpha Z_M}{\sqrt{5+4\gamma_0'''}}\right)^3 \cdot \left(\frac{2\alpha Z_M R}{\sqrt{5+4\gamma_0'''}}\right)^{2\gamma_0'''-2}$$

$\gamma_0''' = \sqrt{1-\alpha^2 Z_M^2} \qquad g_{M_I}^2 + f_{M_{II}}^2 \sim \frac{3^3}{9} \times \frac{1}{3^3} g_K^2 = \frac{g_K^2}{9}$

...

Comme $Z_M = Z - 2 \times 1{,}00 - 8 \times 0{,}85 - 17 \times 0{,}35 = Z - 14{,}75$ (9)
la diminution de Z diminue plus fortement P_M même pour les éléments moyens.

En résumé : $\rho_1^c = \frac{g^2}{4\pi^2} |m|^2 (B_K + B_L + B_M)$ (10)

où $B_K = (\varepsilon_0 + \varepsilon_K)^2 g_K^2$, $B_L = (\varepsilon_0 + \varepsilon_L)^2 (g_{L_I}^2 + f_{L_{II}}^2)$, $B_M = (\varepsilon_0 + \varepsilon_M)^2 (g_{M_I}^2 + f_{M_{II}}^2)$

$B_M \leq 8\,\%$ du total pourra toujours être négligé

Il faut remarquer que, en prenant $m_1 = \pm \frac{1}{2}$ on considère automatiquement les 2 électrons K, les 2 électrons L_I etc... ; il n'y a donc pas lieu de multiplier les probabilités obtenus par les nombres effectifs d'électrons K, L_I, etc..., comme le fait Marshak, quand les couches sont saturées. Si elles ne le sont pas, et s'il y a , par exemple, un seul électron K, on voit que :

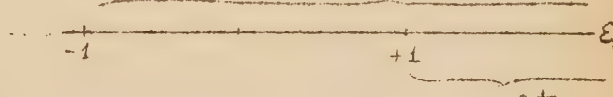
$$B_K \left(m_1 = +\tfrac{1}{2}\right) \sim \left[|\beta(\sigma_x - i\sigma_y)|^2 + |\beta\sigma_z|^2\right]$$
$$B_K \left(m_1 = -\tfrac{1}{2}\right) \sim \left[|\beta(\sigma_x + i\sigma_y)|^2 + |\beta\sigma_z|^2\right]$$

En fait, il faudrait prendre $\frac{1}{2} P_K$ précédemment calculé l'électron unique ayant une probabilité égale de se trouver dans l'un des états $+\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$

On voit que : $B_K \sim (\varepsilon_0 + \varepsilon_K)^2 (\alpha Z)^3$ sensiblement quand on compare plusieurs nuclides donnant des captures K ; P_K s'annule lorsque $\varepsilon_0 + \varepsilon_K = 0$

Energétiquement, la capture K est possible si $\varepsilon_0 > -\varepsilon_K$ ou $\varepsilon_0 > -(1 - E_K)$ E_K énergie de liaison des électrons K

L'émission β^+ qui est un processus équivalent, est, elle, possible si $\varepsilon_0 > 1$



Pour $\varepsilon_0 > 1$, il y a compétition entre les deux processus.

La valeur théorique du rapport d'embranchement $\frac{\rho_1^c}{\rho_1}$ ne dépend plus de $|m|^2$ qui est mal connu, ni de la constante de Fermi.

La comparaison avec la valeur expérimentale est donc un test excellent pour la théorie [5]

Comme $Z_M = Z - 2 \times 1{,}00 - 8 \times 0{,}85 - 17 \times 0{,}35 = Z - 14{,}75$ (9)
la diminution de Z diminue plus fortement P_M même pour les éléments moyens.

En résumé : $\rho_1^c = \frac{g^2}{4\pi^2} |m|^2 (B_K + B_L + B_M)$ (10)

où $B_K = (\varepsilon_0 + \varepsilon_K)^2 g_K^2$, $B_L = (\varepsilon_0 + \varepsilon_L)^2 (g_{L_I}^2 + f_{L_{II}}^2)$, $B_M = (\varepsilon_0 + \varepsilon_M)^2 (g_{M_I}^2 + g_{M_{II}}^2)$

$B_M \leq 8\,\%$ du total pourra toujours être négligé

Il faut remarquer que, en prenant $m_1 = \pm \frac{1}{2}$ on considère automatiquement les 2 électrons K, les 2 électrons L_I etc... ; il n'y a donc pas lieu de multiplier les probabilités obtenus par les nombres effectifs d'électrons K, L_I, etc..., comme le fait Marshak, quand les couches sont saturées. Si elles ne le sont pas, et s'il y a , par exemple, un seul électron K, on voit que :

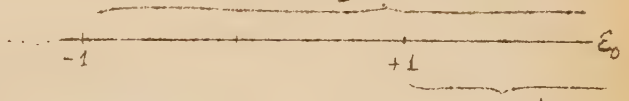
$$B_K \left(m_1 = +\tfrac{1}{2}\right) \sim \left[|\beta(\sigma_x - i\sigma_y)|^2 + |\beta\sigma_z|^2\right]$$
$$B_K \left(m_1 = -\tfrac{1}{2}\right) \sim \left[|\beta(\sigma_x + i\sigma_y)|^2 + |\beta\sigma_z|^2\right]$$

En fait, il faudrait prendre $\frac{1}{2} P_K$ précédemment calculé l'électron unique ayant une probabilité égale de se trouver dans l'un des états $+\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$

On voit que : $B_K \sim (\varepsilon_0 + \varepsilon_K)^2 (\alpha Z)^3$ sensiblement quand on compare plusieurs nuclides donnant des captures K ; P_K s'annule lorsque $\varepsilon_0 + \varepsilon_K = 0$

Energétiquement, la capture K est possible si $\varepsilon_0 > -\varepsilon_K$ ou $\varepsilon_0 > -(1 - E_K)$ E_K énergie de liaison des électrons K

L'émission β^+ qui est un processus équivalent, est, elle, possible si $\varepsilon_0 > 1$



Pour $\varepsilon_0 > 1$, il y a compétition entre les deux processus.

La valeur théorique du rapport d'embranchement $\frac{\rho_1^c}{\rho_1}$ ne dépend plus de $|m|^2$ qui est mal connu, ni de la constante de Fermi.

La comparaison avec la valeur expérimentale est donc un test excellent pour la théorie [5]

42 - Transitions interdites d'ordre n avec $\Delta J = n + I$

La probabilité de transition correspondante ${}^{n}P_{n+1}$ se réduit au seul terme $|G_{n+1}|^2$ où :

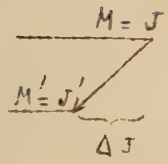
$k = n + 1 = \Delta J$

$$(1)\qquad P_{n+1} = |G_{n+1}|^2 = \frac{2\pi g^2}{2J+1} \sum_{j_1+j_2=n+1} \sum_{M} \sum_{m_1 m_2} \left| \sqrt{\mathcal{F}_f} \beta \left[\frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}} \frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{\sqrt{2}} \frac{A_x - iA_y}{\sqrt{2}} + \sigma_z A_z \right] \Psi_i \right.$$

$$M - M' = \mu = m_1 + m_2 \rightarrow |\mu| \leq |m_1| + |m_2| \leq j_1 + j_2 = k$$

42I- Donc, ici, $|\mu| \leq \Delta J$. On peut alors simplifier le calcul de P_{n+1} si l'on admet, comme le fait Marshak, que le théorème (M) : $\sum_{M'} P(J, M \rightarrow J', M')$ est indépendant de M reste exact pour ces transitions interdites.

Alors on n'a pas à effectuer $\frac{1}{2J+1}\sum_{M}$ et, si $J' \leq J$, on peut prendre $M = J$



Dans ce cas, la seule valeur possible de M' est J' : $M' \leq J'$ et $M - M' \leq J - J'$ nécessairement.

Si $J' \geq J$, on considérera la transition inverse d'après le raisonnement fait pour les transitions permises :

$$P_1(J \rightarrow J') = \frac{2J'+1}{2J+1} P_1(J' \rightarrow J)$$

En admettant (M), on a un cas tout à fait analogue à celui des transitions permises avec $\Delta J = 1$

Pour que $\mu = j_1 + j_2$ il faut que $m_1 = j_1$, $m_2 = j_2$ Il n'y a donc plus à effectuer $\sum_{m_1 m_2}$ De plus, d'après les équations (·) § 2I2, seul $A_x + iA_y \neq 0$ dans ces conditions :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y) = \sqrt{2}\ \overline{Y_r^r\, Y_0^s}\ (g_r f_{-s-2} \text{ ou } f_{-r-2} g_s) \quad \text{avec } r + s = n$$

$$= \sqrt{2}\,(-1)^n\, Y_r^{-r}\, Y_0^{-s} \left(\text{——— id ———} \right)$$

$$\equiv (-1)^n \sqrt{2}\ \alpha(r,s)\ Y_n^{-n} (g_r f_{-s-2} \text{ ou } f_{-r-2} g_s)$$

En effet, en général :

$$Y_r^{\mu_1} Y_s^{\mu_2} = a_0\, Y_{r+s}^{\mu_1+\mu_2} + a_2\, Y_{r+s-2}^{\mu_1+\mu_2} + \dots + a_{2s}\, Y_{r-s}^{\mu_1+\mu_2} \qquad (r>s)$$

et le seul terme non nul de $\int \beta\vec{\sigma}$ correspond à $Y_n \equiv Y_{r+s}$

Ici, $\mu_1 = -r$, $\mu_2 = -s$ et les coefficients des fonctions Y_{n-2}^{-n} etc... non définies, sont nécessairement nuls

$$Y_r^{-r} Y_s^{-s} = \alpha(r,s)\, Y_n^{-n} \rightarrow P_{rs} = 2\pi g^2 \cdot 2\alpha^2(r,s)\, R_{rs}^2(\varepsilon) \left| \int \overline{\psi_{J'}^{J'}}\, \beta \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}}\, Y_n^{-n}\, \psi_J^J \right|^2 \qquad (2)$$

où . $R_{rs}^2(\varepsilon) = g_r^2 f_{-s-2}^2 + f_{-r-2}^2\, g_s^2$

$$P_{n+1} = 2\pi g^2 \left| \int \overline{\psi_{J'}^{J'}}\, \Omega_-\, Y_n^{-n}\, \psi_J^J \right|^2 \cdot \sum_{r+s=n} 2\alpha^2(r,s)\, R_{rs}^2(\varepsilon) \qquad (3)$$

avec : $\Omega_- = \beta \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}}$ (on pose de même $\Omega_+ = \beta \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{\sqrt{2}}$, $\Omega_z = \beta\sigma_z$

$$R_{rs}^2 = \frac{q^2}{\pi} \frac{(qR)^{2s}}{[1\times 3\times \dots \times(2s+1)]^2} \left(g_r^2 + f_{-r-2}^2\right)$$ d'après (3) § 2I2

$$= \frac{q^2}{\pi} \frac{(qR)^{2s}}{[1\times 3\times \dots \times(2s+1)]^2} \frac{2}{\pi} \frac{\gamma_{r+1} + 1}{2r+2} \left(\frac{(pR)^{2r}}{(2r+1)!}\right)^2 F_r\, (2pR)^{2r}\, \varepsilon p$$ (pour l'émission β (3)app.III

où d'ailleurs : $\frac{1}{1\times 3\times \dots \times(2s+1)} = \frac{2\times 4\times \dots \times 2s}{1\times 2\times 3\times \dots \times 2s\times(2s+1)} = \frac{2^s s!}{(2s+1)!}$

$$R_{rs}^2 = \frac{2q^2}{\pi^2}\left[\frac{2^n r!\, s!}{(2r+1)!\,(2s+1)!}\right]^2 (pR)^{2r} (qR)^{2s} F_r \cdot \varepsilon p$$

D'autre part , on a ((II)App. II).

$$\alpha^2(r,s) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{(r+s)!}{r!\, s!}\right]^2 \frac{(2r+1)!\,(2s+1)!}{(2r+2s+1)!}$$

$$\alpha^2(r,s)\left[\frac{2^n r!\, s!}{(2r+1)!\,(2s+1)!}\right]^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{[(r+s)!]^2\, 2^{2n}}{(2r+1)!\,(2s+1)!\,(2r+2s+1)!}$$

$$\sum \alpha_{rs}^2 R_{rs}^2 = \frac{1}{2\pi^3}\, \varepsilon p q^2 \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{r+s=n} \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!\,(2s+1)!} \frac{\gamma_r + r + 1}{2r+2} F_r \qquad (4a)$$

$$P_{n+1} = \frac{g^2}{2\pi^3}\left(4\pi \left|\int \Omega_-\right|^2\right) \cdot \rho_J\, \varepsilon p q^2 \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{r+s=n} \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!\,(2s+1)!} \frac{\gamma_r + r + 1}{2r+2} F_r \qquad (4)$$

$$\left|\int \Omega_-\right|^2 = \left| \int \overline{\psi_{J'}^{J'}}\, \Omega_-\, Y_n^{-n}\, \psi_J^J \right|^2 , \quad \rho_J = \begin{cases} 1 & \text{si } J' > J \\ \frac{2J'+1}{2J+1} & J' < J \end{cases}$$

...

En posant $\mathcal{M}_n = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \Omega_- = \sqrt{4\pi} \int \Omega_-$, $\mathcal{M}_n$ se confond avec $\mathcal{M}$ précédemment défini pour les transitions permises lorsque $n = 0$ et l'on retrouve le facteur $\frac{g^2}{2\pi^3}$

$\mathcal{M}_n$ se confond d'ailleurs avec M_n défini par Marshak :

$$M_n = 4\pi \int \frac{T_f}{f} \beta \frac{\tau_2 - i\sigma_y}{\sqrt{2}} \psi_i \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n^{-n} Y_0^0 \, d\tau$$

le facteur $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ tenant compte, en partie, de la variation de r à l'intérieur du noyau.

Comme : $\frac{2^n n!}{(2n+1)!} = \frac{1}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}$ on peut écrire comme Marshak :

$$P_{n+1}(\varepsilon) = \frac{g^2}{4\pi^3} \frac{|m_n|^2}{[1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)]^2} \rho_J \, B_n(\varepsilon, 2) \qquad (5)$$

$$B_n(\varepsilon, 2) = \varepsilon p q^2 \sum_{r+s=n} (2n+1)! \frac{(pR)^{2r} (qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \frac{\gamma_r + r + 1}{2r+2} F_r \qquad (6)$$

$$= \varepsilon p q^2 \frac{1}{2n+2} \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+2}{2r+1} (pR)^{2r} (qR)^{2n-2r} \frac{\gamma_r + r + 1}{2r+2} F_r$$

$\binom{2n+2}{2r+1}$ coefficients du développement de $(a+b)^{2n+2}$

(Marshak fait sortir de B_n le facteur R^{2n})

Noter que, dans certains cas particuliers, il faudrait supprimer certains termes de $\sum_{r+s}$ parce que j_1, j_2 correspondants ne vérifient pas la condition $|j_1 - j_2| \leq J + J'$ transitions permise

n = 0, $B_0(\varepsilon, 2) = \varepsilon p q^2 \frac{1+\gamma_0}{2} \cdot F_0$

n = 1, $B_1(\varepsilon, 2) = \varepsilon p q^2 \left[q^2 R^2 \frac{1+\gamma_0}{2} F_0 + p^2 R^2 \frac{2+\gamma_1}{4} F_1 \right]$

n = 2, $B_2(\varepsilon, 2) = \varepsilon p q^2 \left[q^4 R^4 \frac{1+\gamma_0}{2} F_0 + \frac{10}{3} (q^2 R^2)(p^2 R^2) \frac{2+\gamma_1}{4} F_1 + p^4 R^4 \frac{3+\gamma_2}{6} F_2 \right]$

en accord avec Marshak, qui donne les expressions de B_1, B_2, B_3 (66) mais non la formule générale (6)

Cet auteur a utilisé $B_2(\varepsilon, 2)$ pour calculer le spectre β^- dans la transition $^{10}Be \longrightarrow {}^{10}B$ [24] comme R. Bouchez et nous-même [10]

Dans [21], Marshak a posé :

$$B_2(\varepsilon, 2) = \varepsilon p q^2 F_0 \cdot D_2(\varepsilon, 2)$$

...

Le facteur D_2 (ou en général D_n) est un facteur correctif au spectre des transitions permises $\left(D_0 = \frac{1+V_0}{2} \neq 1\right)$

Greuling [I8] le désigne par C_{nT} et trouve, dans le cas actuel (loc.cit.p.572).

$$C_{nT} = \left| \frac{Q_{n+1}(\beta\vec{\sigma},\vec{r})}{(n+1)!} \right|^2 \sum_{r=0}^{n} B_{nr}\, q^{2n-2r} L_r \qquad (7)$$

avec : $B_{nr} = \frac{2^{n-2r}(2r+1)!}{(2s+1)!\,(r!)^2}$

$$L_r = \frac{F_r}{F_0}\left[\frac{2^r r!}{(2r+1)!}\,p^r\right]^2 \frac{\gamma_{n+r+1}}{2r+1}$$

(7) s'identifie avec notre formule (4) en posant :

$$\left| \frac{Q_{n+1}(\beta\vec{\sigma},\vec{r})}{(n+1)!} \right|^2 = \frac{R^{2n}|m_n|^2 2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)} \left| R^n m_n \right|^2$$

Il apparaît donc que la méthode de Greuling (onde plan pour le neutrino seul) est équivalent ici au traitement en admettant le théorème (M)

422- La méthode de Greuling étant criticable (§ 2I3, 2ème Rem.) nous allons chercher à vérifier (M).

Pour cela, nous prenons M quelconque et appliquons (1

Pour effectuer $\sum_{m_1,m_2}$ nous effectuons d'abord $\sum_{m_1+m_2=\mu}$ puis $\sum_{\mu}$

Ici, nous avons :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y) = a_+(r,s,t,v)\; Y_n^{-(\mu-1)}\; R_{rs}(\varepsilon) + \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y) = a_-(r,s,t,v)\; Y_n^{-(\mu+1)}\; R_{rs}(\varepsilon) + \cdots \\ A_z = a_z(r,s,t,v)\; Y_n^{-\mu}\; R_{rs}(\varepsilon) + \cdots \end{cases}$$

a_+, a_-, a_z résultant des coefficients figurant dans (1) § 2I2 et de la réduction des produits de fonctions :

...

$$Y_r^{-t}\, Y_s^{-v} = Y_{r+s}^{-(t+v)} + Y_{r+s-2}^{-(t+v)} + \cdots$$

$$Y_r^{-t-1}\, Y_s^{-v-1} = Y_{r+s}^{-(t+v+2)} + \cdots$$

$$Y_r^{-t}\, Y_s^{-v-1} + Y_r^{-t-1}\, Y_s^{-v} = Y_{r+s}^{-(t+v+1)} + \cdots$$

où le Ier terme/donne une contribution $\neq 0$ à $\int \beta \vec{\sigma}$ (seul)

$$\rho_{rs} = 2\pi g^2 R_{rs}^2 \sum_{\mu} \sum_{m_1+m_2=\mu} \left| a_- \int \overline{\Psi_{J'}^{M'}}\, \Omega_+\, Y_n^{-(\mu+1)}\, \Psi_J^M + a_+ \int \overline{\Psi_{J'}^{M'}}\, \Omega_-\, Y_n^{-(\mu-1)}\, \Psi_J^M + a_z \int \overline{\Psi_{J'}^{M'}}\, \Omega_z\, Y_n^{-\mu} \right|^2$$

Cette expression semble essentiellement différente de (3) puisqu'elle dépend apparemment de 3 éléments de matrice nucléaires m_n^+, m_n^-, m_n^z au lieu d'un seul.

Pour que la somme $a_- m_n^+ + a_+ m_n^- + a_z m_n^z$ se réduise à $\alpha . m_n$ il faut que $\frac{a_-}{a_+}$, $\frac{a_z}{a_+}$ ne dépendent pas de r, s, t, v, mais seulement de leurs sommes : r+s=n, t+v= μ-1 puisque les m_n ne dépendent que de n, μ et non de r, s, t, v séparément. Or, pour r, s fixés et $\mu = m_1 + m_2$ donné, ces rapports dépendent en réalité de m_1, m_2 comme on le vérifie facilement (par exemple pour r=0, s=1)

En fait, il nous suffit que $\sum_{\mu} \sum_{m_1+m_2=\mu} \left| a_- \int . + \cdots \right|^2$ puisse se mettre sous la forme :

$$2\alpha^2(r,1) \left| \int \Omega_- \right|^2 \qquad (3)'$$

$$4\pi \sum_{m_1+m_2=\mu} |\cdots|^2 = \sum_{m_1+m_2=\mu} a_+^2 |m_n^-|^2 + a_-^2 |m_n^+|^2 + a_z^2 |m_n^z|^2 + \left(a_+ a_- m_n^+ m_n^- + a_+ a_z m_n^- m_{n_z} + a_z a_- m_{n_z} m_n^+ + \text{C.C.} \right.$$

$$= \left(A_+ |m_n^-|^2 + A_- |m_n^+|^2 + A |m_n^z|^2 + B \left(m_n^+ \overline{m_n^-} + \text{CC} \right) \right.$$
$$\left. + B_+ \left(m_n^- \overline{m_{n_z}} + \text{CC} \right) + B_- \left(m_n^+ \overline{m_{n_z}} + \text{CC} \right) \right.$$

avec :

$$A_+(r,s,\mu) = \sum_{m_1+m_2=\mu} a_+^2 \quad , \quad A_- = \sum a_-^2 \quad , \quad A = \sum a_z^2$$

$$B = \sum a_+ a_- \quad , \quad B_+ = \sum a_+ a_z \quad , \quad B_- = \sum a_- a_z$$

Prenons en particulier :

$$\mu = n = j_1 + j_2 - 1 \qquad \begin{cases} m_1 = j_1 - 1 \ , \ m_2 = j_2 & (t = r-1, \ v = s) \\ m_1 = j_1 \ , \ m_2 = j_2 - 1 & (t = r \ , \ v = s-1) \end{cases}$$

$t = r-1, \ v = s$, d'après (1) § 2I2 :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + i A_y) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2r}{2r+1}}(-1)^{n-1} Y_r^{-(r-1)} Y_s^{-s} \ (g_r f_{-s-2} \text{ ou } f_{-r-2} g_s) \\ A_x - i A_y = 0 \\ A_z = -\frac{1}{\sqrt{2r+1}}(-1)^n Y_r^{-r} Y_s^{-s} \qquad (\text{———}) \end{cases}$$

$$Y_r^{-r} Y_s^{-s} = \alpha(r,s) \, Y_n^{-n} \qquad Y_r^{-(r-1)} Y_s^{-s} = \beta(r-1,s) \, Y_n^{-(n-1)}$$

$\beta(\ )$ donné dans App. II. Eq.(12)

$$\sqrt{\frac{2r}{2r+1}}\,\beta(r-1,s) = \sqrt{\frac{2r}{2r+1}}\,\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{(2r+1)(2r-1)!(2s+1)!}{(2r+2s+1)(2r+2s-1)!}}\,\frac{(r-1+s)!}{(r-1)!\,s!}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{(2r)!(2s+1)!}{(2n+1)(2n-1)!}}\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,s!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2r+1}}\,\alpha(r,s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{(2r)!(2s+1)!}{(2n+1)!}}\cdot\frac{n!}{r!\,s!}$$ d'où, pour la partie <u>angulaire</u>

$$(-1)^n \int \beta\vec{\sigma}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{(2r+1)!(2s+1)!}{(2n+1)!}}\,\frac{n!}{r!\,s!}\left[\sqrt{2}\sqrt{\frac{2n}{2r+1}}\,\frac{r}{n}\int Y_n^{-(n-1)}\Omega_- + \frac{1}{\sqrt{2r+1}}\int Y_n^{-n}\Omega_z\right]$$

$$4\pi\left|\int\beta\vec{\sigma}\cdot\vec{A}\right|^2 = 2\alpha^2(r,s)\left[\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{r^2}{n^2}\left|m_n^-\right|^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2r+1}\left|m_n^z\right|^2 + \frac{\sqrt{n}}{2r+1}\,\frac{r}{n}\left(m_n^-\overline{m_n^z} + cc\right)\right]$$

pour t = r-1, v = s - Avec :

$$m_n^- = \sqrt{4\pi}\int \psi_{J'}^{M-n}\,\Omega_-\,Y_n^{-(n-1)}\,\psi_J^M \tag{8}$$

$$m_n^z = \sqrt{4\pi}\int \psi_{J'}^{M-n}\,\Omega_z\,Y_n^{-n}\,\psi_J^M \tag{9}$$

Pour t = r, v = s-1 :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + i A_y) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2s}{2s+1}}(-1)^{n-1} Y_r^{-r} Y_s^{-(s-1)} \ (g_r f_{-s-2} \text{ ou } f_{-r-2} g_s) \\ A_x - i A_y = 0 \\ A_z = -\frac{1}{\sqrt{2s+1}}(-1)^n Y_r^{-r} Y_s^{-s} \qquad (\text{——— d° —}) \end{cases}$$

Il suffit d'échanger r et s dans le résultat précédent pour $4\pi \left| \int \beta \vec{\sigma} . \vec{A} \right|^2$ d'où la somme $\sum_{m_1+m_2=n}$

$$4\pi \left| \int \beta \vec{\sigma} . \vec{A} \right|^2 = 2\alpha^2(r,s) \left[\frac{2}{n} \left(\frac{r^2}{2r+1} + \frac{s^2}{2s+1} \right) |m_n^-|^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2r+1} + \frac{1}{2s+1} \right) |m_n^z|^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{r}{2r+1} + \frac{s}{2s+1} \right) \left(m_n^- \overline{m_n^z} + CC \right) \right]$$

(I0)
$$= 2\alpha^2(r,s) \left\{ \begin{array}{l} |m_n^-|^2 \frac{2}{n} \cdot \frac{n^2 + 2(n-1)rs}{(2r+1)(2s+1)} \\ + |m_n^z|^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+2}{(2r+1)(2s+1)} \\ + \left(m_n^- \overline{m_n^z} + CC \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{4rs+n}{(2r+1)(2s+1)} \end{array} \right. \equiv 2\alpha_{rs}^2 \left[\frac{A_n}{(2r+1)(2s+1)} + \frac{4B_n r}{(2r+1)(}\right.$$

avec :

$$A_n \equiv 2n |m_n^-|^2 + (n+1) |m_n^z|^2 + \sqrt{n} \left(m_n^- \overline{m_n^z} + CC \right)$$

$$B_n \equiv \frac{n-1}{n} |m_n^-|^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(m_n^- \overline{m_n^z} + CC \right)$$

$4\pi \left| \int \beta \vec{\sigma} . \vec{A} \right|^2$ dépend alors de r + s <u>et de rs</u>, sauf si :

<u>$A_n \equiv (2n+1) B_n$</u> alors $[\ \ldots\ ] \equiv A_n$

Cette condition s'écrit :

$$\left[2n - \frac{(n-1)(2n+1)}{n} \right] |m_n^-|^2 + (n+1) |m_n^z|^2 + \left(\sqrt{n} - \frac{2n+1}{\sqrt{n}} \right) \left(m_n^- m_n^z + CC \right) = 0$$

$$\frac{1}{n} |m_n^-|^2 + |m_n^z|^2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \left(m_n^- \overline{m_n^z} + CC \right) = 0$$

$$\boxed{m_n^- = \sqrt{n}\ m_n^z} \qquad (11)$$

Or, on a l'identité générale (cf. plus loin § 33) :

(I2) $$\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\ m_n^z - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\ m_n^- \equiv \mathcal{L}_n'' = i\sqrt{4\pi} \int \overline{\psi_{J'}^{M'}} \frac{(\beta \vec{\sigma} \wedge \vec{r})_-}{R} Y_{n-1}^{-(n-1)} \psi_J^M$$

$\int \overline{\psi_{J'}^{M'} Y_{n-1}^{n-1}} (\beta \vec{\sigma} \wedge \vec{r})_- \psi_J^M = 0$ si l'on n'a pas :

$$J' + n - 1 - \lambda = \begin{cases} J - 1 & \text{où} \quad 0 \leq \lambda \leq 2(n-1) \text{ si } J' > n-1 \\ J & \qquad\quad 0 \leq \lambda \leq 2J \qquad\quad J' < n-1 \\ J + 1 & \end{cases}$$

...

$(\overline{\Psi'} \beta \vec{\sigma} \wedge \vec{r} \Psi$ étant un vecteur : $(\beta \vec{\sigma} \wedge \vec{r})_- \Psi_J^M \to \Psi_{J-1}^{M-1}$ ou Ψ_J^{M-1} ou Ψ_{J+1}^{M-1}

$$J - J' = \begin{cases} n - \lambda & \leq n \\ n - \lambda - 1 \\ n - \lambda - 2 \end{cases}$$

Comme ici : $J - J' = n + 1$, $\mathcal{L}''_n = 0$

et (11) est vérifiée.

On voit donc comment le théorème (M) se vérifie dans le calculs pratiques. Il a été démontré en général par S.R. de Gro et H.A. Tolhoek [I6] (cf. App. II § 3).

Remarque :

Pour la capture électronique, on a toujours (3) et :

$$R_{k\lambda}^2 = \sum_{n'} \frac{q^2}{\pi} \frac{(qR)^{2n}}{[1\times 3\times \dots \times(2n+1)]^2} \left(g_r^2 + f_{r+2}^2\right)$$ capture ((5) App. II).

$|m_n|^2$ et g^2 disparaissent toujours dans le rapport d'embranchement.

43- Transitions <u>interdites d'ordre n avec $\Delta J = n$</u>

Comme le cas précédent, celui-ci se présente même lorsque L n'est pas défini. ${}^n P_n$ est ici la somme de plusieurs termes : ${}^n P_n = |G'_n + G''_n|^2 + |G_{n+1}|^2$

Pour $|G'_n + G''_n|^2$, $\Delta J = k$ et nous pouvons réduire $\sum_{m_1 m_2}$ à un seul terme ($m_1 = j_1$, $m_2 = j_2$) ainsi que $\sum_{M'}$ (M'=J') grâce au théorème (M), en prenant M = J lorsque J' < J .

Mais ici, si $A'_x + iA'_y \neq 0$ seul, $A_x + iA_y$ et A_z sont tous deux $\neq 0$

(I) $$|G'_n + G''_n|^2 = 2\pi g^2 \sum_{j_1+j_2=n} \left| \int \overline{\Psi_{J'}^{J'}} \beta \alpha_- \frac{A'_x + iA'_y}{\sqrt{2}} \Psi_J^J + \int \overline{\Psi_{J'}^{J'}} \Omega_- \frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}} \Psi_J^J + \int \overline{\Psi_{J'}^{J'}} \Omega_z A_z \Psi_J^J \right|$$

$$\beta \alpha_- = \beta \frac{\alpha_x - i\alpha_y}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{A'_x + iA'_y}{\sqrt{2}} = -i\sqrt{2}\,(-1)^{n-1} Y_n^{-r} Y_s^{-s} \left(g_r g_s \text{ ou } -f_{r+2} g_{s+2}\right) \qquad \underline{r+1 = n-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A'_x + iA'_y) = i\sqrt{2}\,(-1)^n \alpha(r,s)\; Y_{n-1}^{-(n-1)} \left(g_r g_s \text{ ou } -f_{-r-2} f_{-s-2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[A_x + a_x + i(A_y + a_y)\right] = -\sqrt{2}\left[\overline{Y_{r+1}^{r}\; Y_s^{s}}\; \frac{f_r g_s \text{ ou } g_{-r-2} f_{-s-2}}{\sqrt{2r+3}} + \right.$$

$$\left. + \overline{Y_1^{r}\; Y_{s+1}^{s}}\; \frac{g_r f_s \text{ ou } f_{-r-2} g_{-s-2}}{\sqrt{2s+3}}\right]$$

$$Y_s^{-s}\, Y_{r+1}^{-r} = \beta(r,s)\; Y_{r+s+1}^{-(r+s)} \quad ; \qquad Y_r^{\,r}\, Y_{s+1}^{-s} = \beta(s,r)\; Y_{r+s+1}^{-(r+s)},$$

$$\beta(r,s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{(2r+3)(2r+1)!\,(2s+1)!}{(2r+2s+3)(2r+2s+1)!}} \cdot \frac{(r+s)!}{r!\,s!}$$

$$\frac{\beta(r,s)}{\sqrt{2r+3}} = \frac{\beta(s,r)}{\sqrt{2s+3}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{(2r+1)!\,(2s+1)!}{(2r+2s+3)(2r+2s+1)!}}\; \frac{(r+s)!}{r!\,s!} = \frac{1}{\sqrt{2r+2s+3}}\,\alpha(r,s)$$

$$\frac{A_x + a_x + i(A_y + a_y)}{\sqrt{2}} = (-1)^n \sqrt{2}\; Y_n^{-(n-1)}\, \frac{\alpha(r,s)}{\sqrt{2n+1}} \left(f_r g_s + g_r f_s \text{ ou } g_{-r-2} f_{-s-2} + f_{-r-2} g_{-s-2}\right)$$

Enfin :

$$A_z + a_z = \sqrt{\frac{2r+2}{2r+3}}\; \overline{Y_{r+1}^{r+1}\; Y_s^{s}} \left(f_r g_s \text{ ou } g_{-r-2} f_{-s-2}\right) + \sqrt{\frac{2s+2}{2s+3}}\; \overline{Y_r^{r}\; Y_{s+1}^{s+1}} \left(g_r f_s \text{ ou } f_{-r-2} g_{-s-2}\right)$$

$$Y_{r+1}^{-(r+1)}\, Y_s^{-s} = \alpha(r+1,s)\; Y_n^{-n} \quad ; \qquad Y_r^{-r}\, Y_{s+1}^{-(s+1)} = \alpha(s+1,r)\; Y_n^{-n}$$

$$\sqrt{\frac{2r+2}{2r+3}}\,\alpha(r+1,s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, \frac{(r+s+1)!}{(r+1)!\,s!} \sqrt{\frac{(2r+3)!\,(2s+1)!\,2r+2}{(2r+2s+3)!\,2r+3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{(r+s+1)!}{r!\,s!} \sqrt{\frac{(2r+1)!\,(2s+1)!}{(2r+2s+3)!}}$$

$$= \frac{2n}{\sqrt{2n(2n+1)}}\; \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\; \frac{(r+s)!}{r!\,s!} \sqrt{\frac{(2r+1)!\,(2s+1)!}{(2r+2s+1)!}} = \sqrt{\frac{2n}{2n+1}}\,\alpha(r,s)$$

$$\sqrt{\frac{2s+2}{2s+3}}\,\alpha(s+1,r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{(r+s+1)!}{r!\,(s+1)!} \sqrt{\frac{(2r+1)!\,(2s+2)!\,(2s+2)}{(2r+2s+3)!}} = \sqrt{\frac{2n}{2n+1}}\,\alpha(r,s) \text{ de même}$$

$$A_z + a_z = (-1)^n\, Y_n^{-n} \sqrt{\frac{2n}{2n+1}}\; \alpha(r,s) \left(f_r g_s + g_r f_s \text{ ou } g_{-r-2} f_{-s-2} + f_{-r-2} g_{-s-2}\right)$$

Donc :

(2) $$\left|G'_n + G''_n\right|^2 = 2\pi g^2 \sum_{r+s=n-1} 2\alpha^2(r,s)\,\frac{1}{4\pi}\sum_{a,b}\left|m'_n R'_{rs} + \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,m_n^- + \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\,m_n^3\right)R''_{rs}\right|$$

$$m'_n = i\sqrt{4\pi}\int Y_{n-1}^{-(n-1)}\,\overline{\Psi_{J'}^{J'}}\,\beta\alpha_-\,\Psi_J^J \qquad (3)$$

avec :

$$m_n^- = \sqrt{4\pi}\int Y_n^{-(n-1)}\,\overline{\Psi_{J'}^{J'}}\,\Omega_-\,\Psi_J^J = (-1)^{n-1}\sqrt{4\pi}\int \overline{Y_n^{n-1}\,\Psi_{J'}^{J'}}\,\Omega_-\,\Psi_J^J$$

$$m_n^3 = \sqrt{4\pi}\int Y_n^{-n}\,\overline{\Psi_{J'}^{J'}}\,\Omega_3\,\Psi_J^J = (-1)^n\sqrt{4\pi}\int \overline{Y_n^n\,\Psi_{J'}^{J'}}\,\Omega_3\,\Psi_J^J$$

(4) $m''_n = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\,m_n^3 + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,m_n^-$ peut se mettre sous une forme un peu différente en remarquant que :

$$\frac{1}{R}\,\frac{x-iy}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_1^{-1} \qquad \text{et} \qquad Y_{n-1}^{-(n-1)} = \alpha(n-1,1)\,Y_n^{-n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{3n}{2n+1}}\,Y_n^{-n}$$

$$\frac{1}{R}\,\frac{x-iy}{\sqrt{2}}\,Y_{n-1}^{-(n-1)} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\,Y_n^{-n}$$

De même : $\frac{z}{R} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_1^0$ et $Y_{n-1}^{-(n-1)}\,Y_1^0 = \beta(0,n-1)\,Y_n^{-(n-1)}$

$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,Y_n^{-(n-1)}$$

$$\frac{z}{R}\,Y_{n-1}^{-(n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,Y_n^{-(n-1)}$$

$$m''_n = \sqrt{4\pi}\int Y_{n-1}^{-(n-1)}\,\overline{\Psi_{J'}^{J'}}\left[\beta\sigma_z\,\frac{x-iy}{R\sqrt{2}} + \beta\,\frac{\sigma_x - i\sigma_y}{\sqrt{2}}\,\frac{z}{R}\right]\Psi_J^J$$

$$= \frac{\sqrt{4\pi}}{R}\int Y_{n-1}^{-(n-1)}\,\overline{\Psi_{J'}^{J'}}\left[\beta\,\frac{\sigma_x z + \sigma_z x}{\sqrt{2}} - i\beta\,\frac{\sigma_y z + \sigma_z y}{\sqrt{2}}\right]\Psi_J^J \qquad (5)$$

Le même calcul donne pour $\mathcal{L}''_n$ la relation (I2) du § précédent : il suffit de changer dans m''_n σ_x, σ_y en $-\sigma_x, -\sigma_y$

Comme $$-g_s = f_{-s-2} = \frac{q}{\sqrt{\pi}}\,\frac{(qR)^s}{1\times 3\times\ldots\times(2s+1)}$$

$$g_{-s-2} = f_s = \frac{q}{\sqrt{\pi}}\,\frac{(qR)^{s+1}}{1\times 3\times\ldots\times(2s+3)} = \frac{qR}{2s+3}\,(-g_s)$$

ooo

(a) $|m'_n R'_{rs} + m''_n R''_{rs}|^2 = g_s^2 \left| g_r m'_n + \left(f_r - \frac{qR}{2s+3} g_r\right) m''_n \right|^2$

(b) $|m'_n R'_{rs} + m''_n R''_{rs}|^2 = f_{-s-2}^2 \left| -f_{-r-2} m'_n + \left(g_{-r-2} + \frac{qR}{2s+3} f_{-r-2}\right) m''_n \right|^2$

$$\sum_{ab} = \begin{cases} g_s^2 |m'_n|^2 (g_r^2 + f_{-r-2}^2) + |m''_n|^2 \left[f_r^2 + g_{-r-2}^2 + \frac{q^2R^2}{(2s+3)^2}(g_r^2 + f_{-r-2}^2) + \frac{2qR}{2s+3}(f_{-r-2} g_{-r-2} \right. \\ \left. + (m'_n \overline{m''_n} + cc)\left[f_{-r-2} g_{-r-2} - f_r g_r + \frac{qR}{2s+3}(g_r^2 + f_{-r-2}^2) \right] \right. \end{cases}$$

Marshak suppose que l'un des termes en $|m'_n|^2$ ou $|m''_n|^2$ est prédominant, et donne ainsi $P_n = |G'_n|^2$ ou $|G''_n|^2$ suivant le cas. Il néglige également le terme : $|G_{n+1}|^2$

En général, bien que $m''_n \sim m_n$ et $m'_n \sim \left(\frac{v}{c}\right) m_n$ les différents termes obtenus sont sensiblement du même ordre, ces facteurs étant compensés par les facteurs radiaux :

$f_r^2 + g_{-r-2}^2 \sim \left(\frac{\alpha 2}{2r+2}\right)^2 (g_r^2 + f_{-r-2}^2)$ etc..

$G'_n \gg G''_n$ pour les noyaux légers tels que $\frac{v}{c} \gg \alpha \frac{Z}{2}$

$G''_n \gg G'_n$ " " " lourds " " $\alpha \frac{Z}{2} \gg \frac{v}{c}$

$$|G'_n + G''_n|^2 = \begin{cases} g^2 |m'_n|^2 \sum'_{r+s=n-1} \alpha^2(r,s)\, g_s^2 (g_r^2 + f_{-r-2}^2) + g^2 |m''_n|^2 \sum''_{r+s} \alpha^2(r,s) \dots \\ + g^2 (m'_n \overline{m''_n} + cc) \sum_{r+s} \alpha^2(r,s) \dots \end{cases} \quad (6)$$

$$\sum' = \frac{1}{2\pi^3} \varepsilon p q^2 \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!} \sum'_{r+s=n-1} \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \frac{r+1+\gamma_r}{2r+2} F_r$$

d'après (4a) du § 32I.

D'après (7) et (9) de l'App.II , il suffit de remplacer r+1+γ_r par r+1-γ_r pour obtenir $\sum \alpha^2(r,s)\, g_s^2 (f_r^2 + g_{-r-2}^2)$

-- $\alpha 2$ -- $\sum \alpha^2(r,s)\, g_s^2 (f_{-r-2} g_{-r-2} - f_r g_r)$

D'où :

$$\sum'' \dots = \frac{1}{2\pi^3} \varepsilon p q^2 \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!} \begin{cases} \sum'_{r+s=n-1} \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \frac{r+1-\gamma_r}{2r+2} F_r \\ + \sum'_{r+s=n-1} \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \frac{r+1+\gamma_r}{2r+2} F_r \\ + \sum'_{r+s=n-1} 2 \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \frac{qR}{2s+3} \frac{\alpha 2}{2r+2} F_r \end{cases} \quad (7)$$

$$\sum \ldots = \frac{1}{2\pi^3}\,\varepsilon p q^2\,\frac{2^{2n-2}\left[(n-1)!\right]^2}{(2n-1)!}\left\{\sum_{r+s}\frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!}\,\frac{\alpha 2}{2r+2}\,F_r\right.$$
$$\left.+\sum_{r+s}\frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!}\,\frac{qR}{2s+3}\,\frac{r+1+\gamma_r}{2r+2}\,F_r\right. \qquad (8)$$

Si nous négligeons $\left(\frac{\alpha 2}{2r+2}\right)^2 \leq \left(\frac{\alpha 2}{2}\right)^2$ devant 1, ce qui est légitime pour $Z \lesssim 70$ avec les approximations, faites jusqu'ici, les termes peuvent être regroupés.

En effet $\frac{r+1+\gamma_r}{2r+2} \# 1$, $\frac{r+1-\gamma_r}{2r+2} \#\left(\frac{\alpha 2}{2r+2}\right)^2$ et.

$$|m_n''|^2 \sum'' \ldots \# \frac{|m_n''|^2}{2\pi^3}\,\varepsilon p q^2\,\frac{2^{2n-2}\left[(n-1)!\right]^2}{(2n-1)!}\sum_{r+s}\frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!}\left(\frac{\alpha 2}{2r+2}+\frac{qR}{2s+3}\right)^2$$

$$\left(m_n' \overline{m_n''} + cc\right)\sum' = \frac{m_n' \overline{m_n''} + cc}{2\pi^3}\,\varepsilon p q^2\,\frac{2^{2n-2}\left[(n-1)!\right]^2}{(2n-1)!}\sum_{r+s}\frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!}\left(\frac{\alpha 2}{2r+2}+\frac{qR}{2s+3}\right)F_r$$

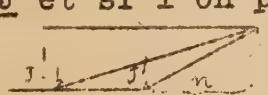
et au total :

$$(9)\qquad |G_n' + G_n''|^2 = \frac{q^2}{2\pi^3}\,\frac{2^{2n-2}\left[(n-1)!\right]^2}{(2n-1)!}\,\rho_J \sum_{r+s=n-1}\frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!}\left|m_n' + m_n''\left(\frac{\alpha 2}{2r+2}+\frac{qR}{2s+3}\right)\right|^2$$

Il reste à calculer $|G_{n+1}|^2$ pour lequel $\Delta J = n$, $k = n+1$ donc $|\mu| \leq |m_1| + |m_2| \leq n+1$

On se trouve dans la même situation que pour les transitions permises avec $\underline{\Delta J = 0}$, $|\mu| \leq 1$: $\sum_{M'}$ ne peut se réduire à un seul terme.

Si $\underline{J' < J}$ et si l'on prend M = J, on peut la réduire à 2 termes



M' ne pouvant prendre que les valeurs : $\begin{cases} J-(n+1) = J'-1 \\ J-n \quad\;\; = J' \end{cases}$

ooo

$M'_n \equiv M_n - (n+1)$ correspond à $m_1 = j_1$, $m_2 = j_2$ ce qui donne un terme identique à ${}^n\rho_{n+1}$ du § 32 où m_n est seulement remplacé par :

$$m_n^{(1)} = \sqrt{4\pi} \int \overline{\psi_{J'}^{J'-1}}\, \Omega_-\, Y_n^{-n}\, \psi_J^J \qquad (10)$$

$M' = M - n$ correspond à $\begin{cases} m_1 = j_1 - 1 , & m_2 = j_2 \\ m_1 = j_1 , & m_2 = j_2 - 1 \end{cases}$

Nous obtenons alors le résultat (10) du § 322, m_n^-, m_n^3 étant définis par les relations (3) du présent §. Ici, $\mathcal{L}''_n \neq 0$ puisque $J - J' = n$, de sorte que (10) ne se ramène pas à un terme proportionnel à ${}^n\rho_{n+1}$. On peut y remplacer m_n^3, m_n^- en fonction de $\mathcal{L}''_n, m''_n$:

$$\begin{cases} m_n^3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{n}}\,(m''_n + \mathcal{L}''_n) \\ m_n^- = \frac{\sqrt{2n+1}}{2}\,(m''_n - \mathcal{L}''_n) \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$A_n \equiv \frac{2n+1}{4n}\left[(n+1)(2n+1)\,|m''_n|^2 + (2n^2 - n + 1)\,|\mathcal{L}''_n|^2 - (n-1)(2n+1)\,(m''_n\,\overline{\mathcal{L}''_n} + cc.)\right]$$

$$B_n \equiv \frac{2n+1}{4n}\left[(n+1)\,|m''_n|^2 + (n-3)\,|\mathcal{L}''_n|^2 - (n-1)\,(m''_n\,\overline{\mathcal{L}''_n} + cc.)\right]$$

(Pour $\mathcal{L}''_n = 0$, on a bien : $A_n = (2n+1)\,B_n$)

(11)
$$2\alpha^2(r,s)\,\frac{A_n + 4B_{n+s}}{(2r+1)(2s+1)} = \begin{cases} 2\alpha^2\,\frac{2n+1+4r+s}{(2r+1)(2s+1)}\cdot\frac{2n+1}{4n}\left[(n+1)|m''_n|^2 - (n-1)(m''_n\overline{\mathcal{L}''_n} + c\right. \\ +2\alpha^2\,\frac{2n^2-n+1+4(n-3)+s}{(2r+1)(2s+1)}\,\frac{2n+1}{4n}\,|\mathcal{L}''_n|^2 \end{cases}$$

Le Ier terme conduit à la probabilité partielle :

$$2\pi g^2\,\frac{2n+1}{4n}\,\frac{1}{4\pi}\,[\dots]\sum_{r+s=n} 2\alpha^2(r,s)\,g_s^2\,(g_r^2 + f_{-r-2}^2)$$ proportionnelle

au terme en $m_n^{(1)}$:

$$2\pi g^2\,\frac{1}{4\pi}\,|m_n^{(1)}|^2 \sum_{r+s=n} 2\alpha^2(r,s)\,g_s^2\,(g_r^2 + f_{-r-2}^2)$$

...

Nous pouvons regrouper ces 2 termes en posant :

$$\mathcal{L}_n^2 = |m_n^{(1)}|^2 + \frac{2n+1}{4n}\left[(n+1)|m_n''|^2 - (n-1)(m_n'' \overline{\mathcal{L}_n''} + cc)\right] \qquad (12)$$

$$g^2 \mathcal{L}_n^2 \sum_{r+s=n} \alpha^2(r,s)\, g_s^2 (g_r^2 + f_{r-2}^2) = \frac{g^2}{2\pi^3} \mathcal{L}_n^2 \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \varepsilon p q^2 \sum_{r+s=n} \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \frac{\gamma_{s+1+1}}{2r+2} F_r$$

Le 2è terme de (8) conduit à :

$$2\pi g^2 \frac{1}{4\pi} |\mathcal{L}_n''|^2 \frac{2n+1}{4n} \sum_{r+s=n} 2\alpha^2(r,s) \frac{4(n-3)rs + 2n^2 - n + 1}{4rs + 2n + 1} g_s^2 (g_r^2 + f_{r-2}^2) =$$

$$\frac{g^2}{2\pi^3} |\mathcal{L}_n''|^2 \frac{2^{2n-2}(n!)^2}{n(2n)!} \varepsilon p q^2 \sum_{r+s=n} \frac{4(n-3)rs + 2n^2 - n + 1}{4rs + 2n + 1} \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \frac{\gamma_{s+r+1}}{2r+2}$$

En résumé, nous avons ici :

$$|G_{n+1}^{(1)}|^2 = \beta_J \frac{g^2}{2\pi^3} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \varepsilon p q^2 \sum_{r+s=n} \left[\mathcal{L}_n^2 + |\mathcal{L}_n''|^2 \frac{2n+1}{4n} \frac{4(n-3)rs + 2n^2 - n + 1}{4rs + 2n + 1}\right] \times$$

$$\times \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \cdot \frac{\gamma_{s+r+1}}{2r+2} F_r \qquad (13)$$

Remarque :

Nous avons encore traité le cas de l'émission β seulement. Pour la capture, il faut prendre les expressions correspondantes de $g_r^2 + f_{r-2}^2$, $f_r^2 + g_{r-2}^2$, etc... etc... données dans App.III.

Mais ici, le rapport d'embranchement n'est pas indépendant des éléments de matrice nucléaires (sauf si l'un des termes G'_n ou G''_n par exemple est nettement prédominant).

${}^{n}P_{n} = |G'_n + G''_n|^2 + |G_{n+1}|^2$ dépend d'une manière homogène des 4 paramètres nucléaires : m'_n, m''_n, $\mathcal{L}''_n$, $\mathcal{L}_n$ (+)

...

(+) Greuling [I8] n'obtient pas, avec sa méthode, le terme en $|\mathcal{L}_n''|^2$; $|G_{n+1}|^2$ a la même expression pour $\Delta J = n$ et $\Delta J = n+1$, ce qui est inexact. D'autre part, m''_n est ici associé à $\beta(\sigma_\mu x_\nu + \sigma_\nu x_\mu)$, $\mathcal{L}''_n$ à $\beta\vec{\sigma}\wedge\vec{r}$ C'est le contraire chez Greuling: $m''_n = \int \beta\vec{\sigma}\wedge\vec{r}$ Cela tient à une différence dans la définition des Y_ℓ^m revenant à un changement de φ en $\varphi + \pi$

Le rapport $\frac{P \text{ capture}}{P^+}$ dépend donc de 3 constantes nucléaires : les rapports $\frac{m'_n}{m''_n} = C'$, $\frac{\mathcal{L}''_n}{m''_n} = C''$, $\frac{\mathcal{L}_n}{m_n} = D$ par exemple.

En faisant, des hypothèses assez générales sur la structure nucléaire (couplage R.S. sensiblement réalisé) on peut calculer C" et D pour une transition J, L, S → J', L', S'

Mais la valeur de C' est incertaine en l'absence de données plus précises et doit être ajustée empiriquement.

Si l'on prend $C' \approx \frac{v}{c}$ on aura $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \gg (\varepsilon_0^2 - 1) R^2$ pour les spectres de β mous et le terme $|G_{n+1}|^2$ pourra être négligé.

44- Transitions <u>interdites d'ordre n avec $\Delta J = n-1$</u>

Celles-ci n'existent que dans l'hypothèse du couplage R.S. $^n P_{n-1} = |G'''_{n-1}|^2 + |G''_n + G'_n|^2 + |G_{n+1}|^2$

Pour le terme $|G'''_{n-1}|^2$, $\Delta J = k$ et la réduction à un seul élément de matrice est possible en prenant M = J.

$$G'''_{n-1} = E'''_{n-1} + F'''_{n-1} + F_{n-1}$$

$E'''_{n-1} + F'''_{n-1}$

$$\begin{cases} \frac{A'_x + iA'_y}{\sqrt{2}} = i\sqrt{\frac{2}{2r+3}}\ \overline{Y^r_{r+1}\, Y^s_0}\ (f_r f_{r-2} \text{ ou } -g_{r-2} g_s) \\ A'_x - iA'_y = 0 \\ A'_z = i\sqrt{\frac{2r+2}{2r+3}}\ \overline{Y^{r+1}_{r+1}\, Y^s_0}\ (\text{——— id ———}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a'_x + ia'_y}{\sqrt{2}} = -i\sqrt{2}\ \frac{1}{\sqrt{2s+3}}\ \overline{Y^r_r\, Y^s_{s+1}}\ (g_r g_{s-2} \text{ ou } f_{r-2} f_s) \\ a'_x - ia'_y = 0 \\ a'_z = -i\sqrt{\frac{2r+2}{2r+3}}\ \overline{Y^r_r\, Y^{s+1}_{s+1}}\ (\text{——— id ———}) \end{cases}$$

avec <u>r + s = n - 2</u>

...

Le calcul est tout à fait analogue à celui qui a été fait pour $E''_n + F''_n$. Il vient :

$$\frac{A'_x + a'_x + i(A'_y + a'_y)}{\sqrt{2}} = i\sqrt{2}(-1)^{n-2}\, Y_{n-1}^{-(n-2)}\, \frac{\alpha(r,s)}{\sqrt{2n-1}} (f_r f_{-s-2} - g_r g_{-s-2} \text{ ou } -g_{-r-2} g_s + f_{-r-2} f_s)$$

$$A'_z + a'_z = i(-1)^{n-1}\, Y_{n-1}^{-(n-1)}\, \alpha(r,s) \sqrt{\frac{2n-2}{2n-1}} \left(\text{——— id ———} \right).$$

$$\int \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{A} = (-1)^{n-2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4\pi}} \alpha(r,s) \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} m'^{-}_n - \sqrt{\frac{n-1}{2n-1}}\, m'^{3}_n \right) R'''_{rs} \qquad (1)$$

avec :

$$\begin{cases} m'^{-}_n = i\sqrt{4\pi} \int Y_{n-1}^{-(n-2)}\, \overline{\Psi^{J'}_{j'}}\, \beta\alpha_- \Psi^J_j \\ m'^{3}_n = i\sqrt{4\pi} \int Y_{n-1}^{-(n-1)}\, \overline{\Psi^{J'}_{j'}}\, \beta\alpha_z \Psi^J_j \end{cases} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}} m'^{-}_n - \sqrt{\frac{n-1}{2n-1}}\, m'^{3}_n = m'''_n = \sqrt{4\pi} \int Y_{n-2}^{-(n-2)}\, \overline{\Psi^{J'}_{j'}}\, \frac{(\beta \vec{\alpha} \wedge \vec{r})_-}{R}\, \Psi^J_j \qquad (3)$$

$$\sum_{ab} (R'''_{rs})^2 = (f_r f_{-s-2} - g_r g_{-s-2})^2 + (f_{-r-2} f_s - g_{-r-2} g_s)^2$$
$$= g_s^2 (f_r^2 + g_{-r-2}^2) + f_s^2 (g_r^2 + f_{-r-2}^2) + 2 f_s g_s (f_r g_r - f_{-r-2} g_{-r-2})$$

en tenant compte de : $g_{-s-2} = f_s$, $f_{-s-2} = -g_s$

$$\sum_{r+s=n-2} \alpha^2 g_s^2 (f_r^2 + g_{-s-2}^2) = \frac{1}{2\pi^3} \varepsilon p q^2 \frac{2^{2n-4} [(n-2)!]^2}{(2n-3)!} \sum' \frac{(pR)^{2r} (qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \frac{r+1-Y_r}{2r+2} F_r$$

$$\sum \alpha^2 f_s^2 (g_r^2 + f_{-r-2}^2) = \text{——————} \sum' \text{———} \left(\frac{qR}{2s+3} \right)^2 \frac{r+1+Y_r}{2r+2} F_r$$

$$2 \sum \alpha^2 f_s g_s (f_r g_r - f_{-r-2} g_{-r-2}) = \text{——————} \sum' \text{———} 2 \frac{qR}{2s+3} \frac{\alpha 2}{2r+2} F_r$$

Si $\left(\frac{\alpha 2}{2r+2}\right)^2 \ll 1$ on peut écrire, comme précédemment :

$$\sum_{ab}\left(R'''_{rs}\right)^2 = \frac{1}{2\pi^3}\,\varepsilon\, pq^2\,\frac{2^{2n-4}\left[(n-2)!\right]^2}{(2n-3)!}\sum'_{r+s=n-2}\frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!}\left(\frac{\alpha 2}{2r+2}+\frac{qR}{2s+3}\right)^2 F_r$$

Pour les spectres de β mous (cas de ^{14}C) $F_{n-1} \ll E'''_{n-1}+F'''_{n-1}$ car $\frac{F_{n-1}}{E'''_{n-1}+F'''_{n-1}} \sim \frac{\left(\sqrt{\xi_0^2-1}\,R\right)\left(\frac{\alpha 2}{2}\right)}{\left(\frac{v}{c}\right)\left(\frac{\alpha 2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\xi_0^2-1}\,R}{v/c}$ et l'on a :

$$\left|G'''_{n-1}\right|^2 = \frac{g^2}{2\pi^3}\left|m'''_n\right|^2\,\frac{2^{2n-4}\left[(n-2)!\right]^2}{(2n-3)!}\sum_{r+s=n-2}\frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!}\left(\frac{\alpha 2}{2r+2}+\frac{qR}{2s+3}\right)^2 F_r \quad (4)$$

Lorsque F_{n-1} n'est pas négligeable :

$$\begin{cases} \dfrac{a_x+ia_y}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{2r+3}}\,\dfrac{1}{\sqrt{2s+3}}\,\overline{Y^r_{r+1}\,Y^s_{s+1}}\ (fr\ g_{n-2}\ ou\ g_{n-2}\ fs) \\ \dfrac{a_x-ia_y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\sqrt{\dfrac{2r+2}{2r+3}}\sqrt{\dfrac{2s+2}{2s+3}}\,\overline{Y^{r+1}_{r+1}\,Y^{s+1}_{s+1}}\ (\text{——— id ———}) \\ a_z = -\left(\dfrac{1}{\sqrt{2r+3}}\sqrt{\dfrac{2s+2}{2s+3}}\,\overline{Y^r_{r+1}\,Y^{s+1}_{s+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2s+3}}\sqrt{\dfrac{2r+2}{2r+3}}\,\overline{Y^{r+1}_{r+1}\,Y^s_{s+1}}\right)(-id) \end{cases}$$

Or : $Y^{-r}_{r+1}\,Y^{-s}_{s+1} = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\dfrac{(r+s+1)!}{r!\,s!}\,\dfrac{1}{2r+2s+3}\sqrt{\dfrac{(2r+3)(2s+3)}{(2r+2s+5)}\,\dfrac{(2r+1)!(2s+1)!}{(2r+2s+2)!}}\,Y^{-(r+s)}_{r+s+2}+$

(cf. App. II-Eq.I3) Il vient en définitive :

$$\begin{cases} \dfrac{a_x+ia_y}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\,(-1)^{n-2}\,Y^{-(n-2)}_n\,\dfrac{\alpha(r+1,s+1)}{\sqrt{n(2n-1)}}\sqrt{\dfrac{(2r+2)(2s+2)}{(2r+3)(2s+3)}}\ (fr\ g_{n-2}\ ou\ g_{n-2}\ fs) \\ \dfrac{a_x-ia_y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,(-1)^n\,Y^{-n}_n\,\alpha(r+1,s+1)\sqrt{\dfrac{(2r+2)(2s+2)}{(2r+3)(2s+3)}}\quad (\text{———}) \\ a_z = (-1)^{n-1}\,Y^{-(n-1)}_n\left[\dfrac{\beta(r,s+1)}{\sqrt{2r+3}}\sqrt{\dfrac{2s+2}{2s+3}}+\dfrac{\beta(s,r+1)}{\sqrt{2s+3}}\sqrt{\dfrac{2r+2}{2r+3}}\right]\ (\text{——}) \\ \quad = \sqrt{2}\,(-1)^n\,Y^{-(n-1)}_n\,\dfrac{\alpha(r+1,s+1)}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{(2r+2)(2s+2)}{(2r+3)(2s+3)}}\quad (\text{———}) \end{cases}$$

$$\int \beta \vec{\sigma}.\vec{a} = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4\pi}} \alpha(r+1,s+1) \sqrt{\frac{(2r+2)(2s+2)}{(2r+3)(2s+3)}} \left[\frac{\mathcal{O}_n^-}{\sqrt{n(2n-1)}} - \mathcal{O}_n^+ - \frac{\mathcal{O}_n^3}{\sqrt{n}} \right] T_{rs} \quad (5)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_n^- = \sqrt{4\pi} \int Y_n^{-(n-2)} \overline{\Psi_{J'}^{J'}} \Omega_- \Psi_J^J \\ \mathcal{O}_n^+ = \sqrt{4\pi} \int Y_n^{-n} \overline{\Psi_{J'}^{J'}} \Omega_+ \Psi_J^J \\ \mathcal{O}_n^3 = \sqrt{4\pi} \int Y_n^{-(n-1)} \overline{\Psi_{J'}^{J'}} \Omega_3 \Psi_J^J \end{cases} \quad (6)$$

$$|T_{n-1}|^2 = g^2 |[\ ]|^2 \sum_{r+s=n-2} \frac{(2r+2)(2s+2)}{(2r+3)(2s+3)} \alpha^2(r+1,s+1) f^2 (f_r^2 + g_{r-2}^2)$$

$$\alpha^2(r+1,s+1) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(r+s+2)!}{(r+1)!(s+1)!} \right]^2 \frac{(2r+3)!(2s+3)!}{(2r+2s+5)!}$$

$$\frac{(2r+2)(2s+2)}{(2r+3)(2s+3)} \alpha^2(r+1,s+1) = 2^4 \frac{(n-1)^2 n^2}{(2n-2)(2n-1)2n(2n+1)} \alpha^2(r,s)$$

$$\sum_{r+s=n-2}' \alpha^2(r,s) f^2 (f_r^2 + g_{r-2}^2) = \frac{1}{2\pi^3} \varepsilon p q^2 \frac{2^{2n-4}[(n-2)!]^2}{(2n-3)!} \sum_{r+s=n-2}' \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \left(\frac{qR}{2s+3} \right)^2 \frac{r+1-\gamma_r}{2r+2} \Gamma_r$$

$$|F_{n-1}|^2 = \frac{g^2}{2\pi^3} |[\ ]|^2 \varepsilon p q^2 \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{r+s=n-2}' \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \left(\frac{qR}{2s+3} \right)^2 \frac{r+1-\gamma_r}{2r+2} \Gamma_r$$

(7)

où $\frac{r+1-\gamma_r}{2r+2} \# \left(\frac{\alpha Z}{2r+2} \right)^2$ Avec cette approximation, on peut regrouper (4) et (7) en posant :

$$|\mathcal{O}_n'''|^2 = 2^4 \frac{(n-1)^2 n^2}{(2n-2)(2n-1)2n(2n+1)} |[\ ]|^2$$

$$\mathcal{O}_n''' = \frac{2}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} \left[\frac{-\mathcal{O}_n^-}{\sqrt{n(2n-1)}} + \mathcal{O}_n^+ + \frac{\mathcal{O}_n^3}{\sqrt{n}} \right] \quad (8)$$

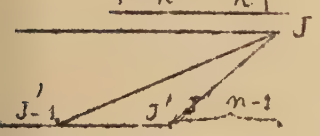
$$\left|G'''_{n-1}\right|^2 = \frac{g^2}{2\pi^3}\rho_J\,\varepsilon p q^2\,\frac{2^{2n-4}\left[(n-2)!\right]^2}{(2n-3)!}\sum_{r+s=n-2}\left|\mathcal{M}'''_n\left(\frac{\alpha Z}{2r+2}+\frac{qR}{2s+3}\right)+\mathcal{P}'''_n\,\frac{qR}{2s+3}\,\frac{\alpha Z}{2r+2}\right|^2 \times$$

$$\times\,\frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!\,(2s+1)!}\,F_r \qquad (9)$$

où : $\mathcal{M}'''_n \sim \frac{v}{c}\,\mathcal{P}'''_n$

Pour obtenir ${}^nP_{n-1}$ il faut y ajouter :

$\left|G''_n + G'_n\right|^2$



Ici $|\mu| \leq n$ et $\Delta J = n-1$; en prenant $M = J$ $(J' < J)$

on a les 2 transitions possibles :

$M = J \qquad M' = J' - 1$ (terme donné par (9) du § 33).

$M = J \qquad M' = J'$

On a un nouveau terme, du même ordre que l'autre, que nous ne calculerons pas, car dans nos applications pratiques, nous aurons $\left|G'_n + G''_n\right|^2 < \frac{1}{10}\left|G'''_{n-1}\right|^2$, et nous pourrons faire le calcul numérique direct de ce terme correctif éventuellement.

$\left|G_{n+1}\right|^2 \qquad |\mu| \leq n+1 \quad$ et $\quad \Delta J = n-1$

$M = J \longrightarrow M' = J' - 2 \qquad m_1 = j_1,\ m_2 = j_2$ (13) du § 33)

$M = J \longrightarrow M' = J' - 1 \qquad m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 1$

$M = J \longrightarrow M = J' \qquad m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 2$

nouveau terme, du même ordre que l'autre, que nous ne calculerons pas, les termes $\left|G_{n+1}\right|^2$ étant encore plus petits devant celui en $\left|\mathcal{M}'''_n\right|^2$: $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \gg (\varepsilon_0^2 - 1)R^2$ et complètement négligeables.

...

CONCLUSION.-

Ordre n ($\Delta L = n$)(+)

$$\begin{cases} \Delta J = n+1 & |G_{n+1}|^2 \\ \Delta J = n & |G'_n + G''_n|^2 + |G^{(1)}_{n+1}|^2 \\ \Delta J = n-1 & |G'''_{n-1}|^2 + |G'_n(1) + G''_n(1)|^2 + |G_{n+1}(2)|^2 \end{cases} \quad (+$$

Les G étant les expressions suivantes :

$$|G_{n+1}|^2 = \frac{g^2}{2\pi^3} \rho_J \left| \int Y_n \beta \vec{\sigma} \right|^2 \varepsilon \rho q^2 \frac{(2n+1)!}{[(2n+1)!!]^2} \sum_{r+s=n} \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \frac{Y_{r+r+1}}{2r+2} F_r$$

$$\begin{cases} |G'_n + G''_n|^2 = \frac{g^2}{2\pi^3} \rho_J \varepsilon \rho q^2 \frac{(2n-1)!}{[(2n-1)!!]^2} \sum_{r+s=n-1} \left| \int Y_{n-1} i\beta \vec{\alpha} + \left(\frac{\alpha 2}{2r+2} + \frac{qR}{2s+3}\right) \int Y_{n-1} [\beta\sigma, \vec{r}] \right|^2 \times \\ \qquad \times \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} F_r \\ \left(\left(\frac{\alpha 2}{2}\right)^2 \ll 1\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |G^{(1)}_{n+1}|^2 = \frac{g^2}{2\pi^3} \rho_J \varepsilon \rho q^2 \frac{(2n+1)!}{[(2n+1)!!]^2} \sum_{r+s=n} \left[\mathcal{L}_n^2 + \left| \int Y_{n-1} \beta \vec{\sigma} \wedge \vec{r} \right|^2 \frac{2n+1}{6n} \frac{4(n-3)r s + 2n}{4rs + 2n + 1} \right] \\ \qquad \times \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \frac{Y_{r+r+1}}{2r+2} F_r \end{cases}$$

$$|G'''_{n-1}|^2 = \frac{g^2}{2\pi^3} \rho_J \varepsilon \rho q^2 \frac{(2n-3)!}{[(2n-3)!!]^2} \sum_{r+s=n-2} \left| \left(\frac{\alpha 2}{2r+2} + \frac{qR}{2s+3}\right) \int Y_{n-2} \beta \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \frac{qR}{2s+3} \frac{\alpha 2}{2r+2} \mathcal{P}'''_n \right|$$

$$\left(\left(\frac{\alpha 2}{2}\right)^2 \ll 1\right) \qquad \times \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} F_r$$

Avec les éléments de matrice nucléaires définis :

$$\int Y_n \beta \vec{\sigma} = m_n \quad , \quad \int Y_{n-1} i\beta \vec{\alpha} = m'_n \quad , \quad \int Y_{n-1} [\beta \vec{\sigma}, \vec{r}] = m''_n$$

(+) Pour ΔL défini.

$\int Y_{n-1}\, \beta \vec{\sigma} \wedge \vec{r} = \mathcal{L}''_n$, $\int Y_{n-2}\, \beta \vec{\alpha} \wedge \vec{r} = \mathcal{M}''_n$, etc...

$(2n+1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)$

Si l'on représente par $I = \pm 1$, $I' = \pm 1$ les parités des noyaux initial et final (I = +1 pair, I = -1 impair) , $I I' = (-1)^n$ toujours.

5- CALCUL AVEC L'INTERACTION A

1°- Calcul de $\vec{A} = \overline{\psi}\vec{\sigma}\varphi$ et des termes correspondants :

$$\begin{cases} A_x + iA_y = 2i\left(\overline{\psi_1\varphi_3} - \overline{\psi_3\varphi_1}\right) \\ A_x - iA_y = -2i\left(\overline{\psi_2\varphi_4} + \overline{\psi_4\varphi_2}\right) \\ A_z = -i\left(\overline{\psi_1\varphi_4} + \overline{\psi_2\varphi_3} - \overline{\psi_3\varphi_2} - \overline{\psi_4\varphi_1}\right) \end{cases}$$

a) Le terme G_{n+1} correspond à $j_1 = l_1 + \frac{1}{2}$, $j_2 = l_2 - \frac{1}{2}$ ou l'inverse.

$$j_1 + j_2 = n+1 \longrightarrow \Delta M \leqslant n+1 \; ; \; J - J' = n+1$$

En prenant M = J, M' = J' , $m_1 = j_1$, $m_2 = j_2$ et seul $A_x + i\,A_y \neq 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y) = \sqrt{2}\;\overline{Y_r^r\,Y_s^s}\left(-g_r f_{s-2} \text{ ou } f_{r-2}\,g_s\right) \qquad \text{avec } r + s = n$$

au lieu de : $\sqrt{2}\;\overline{Y_r^r\,Y_s^s}\;(g_r f_{s-2} \text{ ou } f_{r-2}\,g_s)$ obtenu avec l'interaction T, Ceci ne change rien au résultat :

$$\left|{}^{A}G_{n+1}\right|^2 = \left|{}^{T}G_{n+1}\right|^2$$

L'élément de matrice nucléaire $\int\beta\vec{\sigma}$ est seulement remplacé par $-\int\vec{\sigma}$ sensiblement égal.

b) ${}^{A}G''_n$ correspond à $j_1 = \begin{cases} l_1 + \frac{1}{2} & \longleftrightarrow \; l_2 + \frac{1}{2} \\ l_1 - \frac{1}{2} & \qquad\quad l_2 - \frac{1}{2} \end{cases} = j_2$

$$j_1 + j_2 = n \; ; \; J - J' = n$$

$$M = J \longrightarrow M' = J', \; m_1 = j_1, \; m_2 = j_2 \qquad A_z - iA_y = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y) = \sqrt{2}\left[\frac{\overline{Y_{r+1}^r\,Y_s^s}}{\sqrt{2r+3}}\left(f_r g_s \text{ ou } -g_{r-2}f_{s-2}\right) - \frac{\overline{Y_r^r\,Y_{s+1}^s}}{\sqrt{2s+3}}\left(g_r f_s - f_{r-2}g_{s-2}\right)\right]$$

$$= (-1)^{n-1}\sqrt{2}\;Y_n^{-(n-1)}\,\frac{\alpha(r,s)}{\sqrt{2n+1}}\left[f_r g_s - g_r f_s \text{ ou } \left(f_{r-2}g_{s-2} - g_{r-2}f_{s-2}\right)\right]$$

$$A_z = \sqrt{\frac{2r+2}{2r+3}}\;\overline{Y_{r+1}^{r+1}\,Y_s^s}\left(f_r g_s \text{ ou } -g_{r-2}f_{s-2}\right) - \sqrt{\frac{2s+2}{2s+3}}\;\overline{Y_r^r\,Y_{s+1}^{s+1}}\left(g_r f_s - f_{r-2}g_{s-2}\right)$$

$$= (-1)^n\,Y_n^{-n}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}\;\alpha(r,s)\left[f_r g_s - g_r f_s \text{ ou } \left(f_{r-2}g_{s-2} - g_{r-2}f_{s-2}\right)\right]$$

résultat qui ne diffère de celui obtenu pour T que par quelques changements de signe.

...

Ici : $\mathcal{L}''_n = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\, m_n^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\, m_n$

est l'élément nucléaire et :

$$|{}^{\wedge} G''_n|^2 = g^2 |\mathcal{L}''_n|^2 \sum_{r+s=n-1} \alpha^2(r,s) \sum_{ab} (R''_{rs})^2$$

$$\sum_{ab} = (f_r g_s - g_r f_s)^2 + (f_{r-2} g_{s-2} - g_{r-2} f_{s-2})^2$$

$$= g_s^2 \left(f_r + \frac{qR}{2s+3} g_r\right)^2 + g_s^2 \left(g_{r-2} - \frac{qR}{2s+3} f_{r-2}\right)^2$$

${}^{A}\sum_{ab} R''^2$ s'obtient à partir de ${}^{T}\sum_{ab} R''^2$ en remplaçant $\frac{qR}{2s+3}$ par $-\frac{qR}{2s+3}$ c'est-à-dire que : $\sum_{r+s=n-1} \alpha^2(r,s) \sum_{ab} = {}^{A}\Sigma''$ obtenue en faisant cette substitution dans (7) du § 43. Pour $\left(\frac{\alpha 2}{2}\right)^2 \ll 1$:

$$|{}^{A} G''_n|^2 = \frac{g^2}{2\pi^3} \rho_J |\mathcal{L}''_n|^2 \varepsilon p q^2 \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!} \sum_{r+s=n-1} \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \left(\frac{\alpha 2}{2r+2} - \frac{qR}{2s+3}\right)^2 F_r \quad (1)$$

2°- Calcul de $-\overline{\psi}\gamma_5\varphi$ et de $|G'''_{n-1}|^2$:

$$-\overline{\psi}\gamma_5\varphi = -i\,\overline{\psi}\beta\sigma_2\overline{\varphi} = -\overline{f_1}\varphi_2 + \overline{f_2}\varphi_1 + \overline{f_3}\varphi_4 - \overline{f_4}\varphi_3$$

${}^{A}G'''_{n-1}$ est le terme principal pour $\Delta J = n-1$. Il est obtenu pour $f_1 = \begin{cases} l_1 + \frac{1}{2} & \longleftrightarrow \; l_2 - \frac{1}{2} \\ l_1 - \frac{1}{2} & \qquad l_2 + \frac{1}{2} \end{cases} = f_2 \qquad f_1 + f_2 = n-1 \;,\; r+s = n-2$

$J - J' = n-1 \;;\quad M = J \longrightarrow M' = J' \qquad m_1 = f_1 \;,\; m_2 = f_2$

$$-\overline{\psi}\gamma_5\varphi = \sqrt{\frac{2r+2}{2r+3}}\, \overline{Y^{r+1}_{r+1}}\, Y^0_0 \left(f_r f_{s-2} \text{ ou } g_{r-2} g_s\right) - \sqrt{\frac{2s+2}{2s+3}}\, \overline{Y^r_r}\, Y^{s+1}_{s+1} \left(g_r g_{s-2} \text{ ou } f_{r-2} f\right)$$

$$= (-1)^{n-1} Y^{-(n-1)}_{n-1} \sqrt{\frac{2n-2}{2n-1}} \left[f_r f_{s-2} - g_r g_{s-2} \text{ ou } (g_{r-2} g_s - f_{r-2} f_s)\right]$$

$$|{}^{\wedge} G'''_{n-1}|^2 = g^2 \left|\int Y_{n-1} \beta\gamma_5\right|^2 \sum_{r+s=n-2} \alpha^2(r,s) \sum_{ab} (R'''_{rs})^2$$

$$\sum_{ab} (R'''_{rs})^2 = (f_r f_{s-2} - g_r g_{s-2})^2 + (g_{r-2} g_s - f_{r-2} f_s)^2$$

...

est le même que pour $|^T G'''_{n-1}|^2$

Seul le facteur nucléaire diffère :

$$\int Y_{n-1} Y_S = \sqrt{4\pi} \int Y^{-(n-1)}_{n-1} \overline{\Psi^{J'}_{J'}} Y_S \Psi^J_J$$

En résumé , si l'on considère seulement les termes prépondérants pour $\Delta J = n, n-1$, seul $|^A G''_n|^2$ donné par (1) diffère de $|^T G''_n|^2$:

$$|^A G''_n|^2 = \frac{q^2}{2\pi^3} \rho_J \left| \int Y_{n-1} \vec{\sigma} \wedge \vec{r} \right|^2 \frac{(2n-1)!}{[(2n-1)!!]^2} \varepsilon p q^2 \sum_{r+s=n-1} \frac{(pR)^{2r}(qR)^{2s}}{(2r+1)!(2s+1)!} \left(\frac{\alpha Z}{2r+2} - \frac{qR}{2s+3} \right)^2 F_r$$

pour $\left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 \ll 1$

6- COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

6I- Classification des transitions d'après les données expérimentales.-

6II- Une transition β (composante simple) étant connue expérimentalement, par la mesure de ε_0 et de la période T, il s'agit de reconnaître son ordre d'interdiction.

Pour une transition permise on a (3) du § 4I :

$$\frac{1}{T} = \frac{|m|^2}{T_0} \cdot \frac{1+\gamma_0}{2} \cdot \int_1^{\varepsilon_0} \varepsilon p q^2 F_0(Z,\varepsilon)\, d\varepsilon$$

Posons :

$$f(Z,\varepsilon_0) = \frac{1+\gamma_0}{2} \int_1^{\varepsilon_0} \varepsilon p q^2 F_0(Z,\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad (1)$$

Pour $Z = 0$, $f(0,\varepsilon_0) = \int_1^{\varepsilon_0} \varepsilon p q^2 d\varepsilon = \int_1^{\varepsilon_0} \varepsilon (\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon_0-\varepsilon)^2 d\varepsilon$

$$f(0,\varepsilon_0) = p_0 \left(\frac{1}{30}\varepsilon_0^4 - \frac{3}{20}\varepsilon_0^2 - \frac{2}{15}\right) + \frac{\varepsilon_0}{4} \log(\varepsilon_0 + p_0)$$

avec : $p_0 = (\varepsilon_0^2-1)^{\frac{1}{2}}$ est calculable exactement.

Pour $Z \neq 0$ on peut faire un calcul numérique, par exemple une intégration graphique.

$$f T = \frac{T_0}{|m|^2} \qquad (2)$$

La constante universelle T_0 est justement calculée à l'aide de (2), en prenant une transition pour laquelle $|m|^2 = 1$ en principe $^1_0n \rightarrow {}^1_1H + e^-$

En fait, comme la période du neutron est mal connue, on prend $^3_1H \rightarrow {}^3_2He + e^-$ où l'on admet que $|m|^2 = 1$ le neutron se comportant comme s'il était libre

d'où : $T_0 = 1000$ sec

En général, $|m|^2$ n'est pas connu; s'il variait peu avec la transition considérée, on aurait sensiblement $f T = cte\ K$ pour les transitions permises, ce qui permettrait de déterminer rapidement l'ordre de la transition:

a) Si $f T = K$ (f calculé par (1), T période mesurée) la transition est permise.

b) Si $f T \gg K$ c'est que l'on a :

$$T = \frac{K'}{f_n} \gg \theta = \frac{K}{f}$$

θ période de la transition permise de même ε_0

...

K' $\approx$ K, et la transition est interdite d'ordre n si l'on a :

$$(3)\quad \begin{cases} f_n \approx \dfrac{(\varepsilon_0^2-1)^n R^{2n}}{[(2n+1)!!]^2} f & \text{avec} \quad \Delta J = n+1 \\ f_n \approx \left(\dfrac{v}{c} \pm \dfrac{\alpha 2}{2}\right)^2 \dfrac{(\varepsilon_0^2-1)^{n-1} R^{2n-2}}{[(2n-1)!!]^2} & \text{---} \quad \Delta J = n \\ f_n \approx \left(\dfrac{v}{c}\right)^2 \left(\dfrac{\alpha 2}{2}\right)^2 \dfrac{(\varepsilon_0^2-1)^{n-2} R^{2n-4}}{[(2n-3)!!]^2} & \text{---} \quad \Delta J = n-1 \end{cases}$$

en admettant que l'interaction T soit prédominante(+).
On essayera donc ces facteurs avec les valeurs de n successives 1,2,... pour ramener f T à la valeur K.

D'autres renseignements expérimentaux peuvent alors fournir des renseignements utiles :

la forme du spectre
la valeur de ΔJ

6I2- Malheureusement, le produit f T peut varier dans de larges limites pour les transitions "permises".

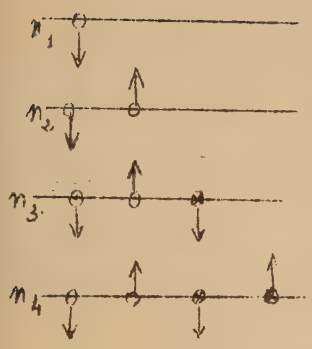
Konspinski [I5] l'a calculé pour toutes ces transitions (en prenant pour critère le fait que $\Delta J = 0$ ou 1, sans changement de parité, et la forme du spectre) et il s'échelonne entre 1000 et 10^6.

Wigner, avec sa théorie des supermultiples, distingue les transitions défavorisées (cas de la grande majorité) et les transitions favorisées.

Comme on l'a vu, Wigner suppose que le potentiel nucléai $V = V^M$ (Majorana)$+V^W$ (Wigner) ne dépend pas de la charge ni du spin des nucléons; l'indépendance par rapport à la charge suppose Z assez petit.

(+) Le signe $\pm$ lorsque $\Delta J = n$ provient du signe du rapport $\dfrac{m'_n}{m''_n}$ qui peut être >0 ou <0 (cf. App.III (11) et (12)).
Si c'est l'interaction A qui prédomine, on doit prendre :

$$f_n \approx \left(\frac{\alpha 2}{2}\right)^2 \frac{(\varepsilon_0^2-1)^{n-1} R^{2n-2}}{[(2n-1)!!]^2} \qquad \text{avec} \quad \Delta J = n \qquad \ldots$$



Alors chaque niveau peut être occupé par 4 nucléons de charge ou de spin différents. Soit n_4 le nombre de ces niveaux ainsi saturés; n_3 sont occupés par 3 nucléons; n_2 par 2 nucléons; n_1 par un seul.

Pour $A = 4n_4 + 3n_3 + 2n_2 + n_1$ donné, l'état le plus stable correspond aux valeurs minima de : $P = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{2}$

$P' = \frac{n_1 + n_3}{2}$, $P'' = \frac{n_1 - n_3}{2}$

Comme d'autre part $T_3 = \frac{N - Z}{2}$ demi excès de neutrons est donné, on trouve que $|T_3| \leq P$ est toujours vérifié, de sorte que l'on a toujours $P_{min.} = |T_3|$

L'ensemble des 3 nombres (P, P' P") constitue une partition. Les résultats indiqués énoncés avec P, P' P" ne dépendent pas, en fait, de l'existence de niveaux individuels.

Les opérateurs $\beta\vec{\sigma}_N$, $\beta\vec{\alpha}_N$, 1, $\vec{\alpha}_N$, etc -- des transitions β permises ne contenant pas les coordonnées d'espace $\psi_i \to \psi_f$ correspondent à la même partition au cours de la transition.

Comme la théorie de Wigner n'est qu'une approximation chaque ψ correspond en réalité à un mélange de partitions avec une partition prédominante. Si ψ_i et ψ_f ont les mêmes partitions prédominantes $|m|^2$ est grand $\simeq 1$: la transition est favorisée.

Dans le cas contraire $|m|^2 \ll 1$, la transition est défavorisée, ce qui est le cas le plus général.

Comme les transitions β ont une faible probabilité en général, le noyau radioactif est dans son état fondamental ou sur un des premiers niveaux excités, de sorte que $P = |T_3|$ pour ψ_i

Si la transition est favorisée, ψ_f a le même P et

$$|T_3'| \leq P = |T_3| \qquad (4)$$

a) Supposons d'abord T_3, $T_3' > 0$, cas le plus général : $T_3' \leq T_3$ (5)

Pour une transition β^+ $T_3' = T_3 + 1$ (5) n'est pas vérifié

—— β^- $T_3' = T_3 - 1$ (5) est vérifiée

...

Le noyau final a des états de la même partition, mais ils ont en général une énergie supérieure à celui du noyau initial, la répulsion Coulombienne ayant augmenté et $P = T_3 = T'_3 + 1$ n'étant pas la valeur minima possible.

La transition conduira en réalité aux états dont $P = T'_3$ d'une partition différente.

b) Si T_3 ou $T'_3 < 0$ ce qui n'est possible que pour les noyaux les plus légers, on peut avoir $|T'_3| = |T_3|$

pour $T_3 = + \frac{1}{2}$ et une transition β^- $({}^1_0 n, {}^3_1 H)$

" $T_3 = - \frac{1}{2}$ " " " β^+ $({}^7_4 Be)$

Les noyaux initial et final sont alors " miroirs" l'un de l'autre et présentent une grande ressemblance $(Z,A) \longrightarrow (Z'=A-Z,A)$: $A-Z = Z \pm 1$ $\quad A = 2Z \pm 1$

$$N = Z \pm 1 \text{ ou } T_3 = \pm \frac{1}{2}$$

(4) est vérifié sans que l'on ait la difficulté de a)

c) Les noyaux légers $A = 4n + 2$ avec $|T_3| = 1$, $T'_3 = 0$ ou l'inverse peuvent aussi donner lieu à des transitions favorisées.

Ainsi : $T_3 = 1$ ↑↓ avec β^- $\longrightarrow$ $T'_3 = 0$ ↑↓ $({}^6_2 He)$

$T_3 = -1$ ↓↓ " $T'_3 = 0$ ↓↓

$T_3 = 0$ ↑↓ " $T'_3 = 1$ ↑ ↑ $({}^{18}_9 F, {}^{26}_{13} Al)$

bien que (4) ne soit pas vérifiée pour $T_3 = 0$, et que la difficulté de a) subsiste pour les transitions β^- ($T_3 = -1$ ne peut se rencontrer en fait).

Les noyaux initial et final présentent d'ailleurs beaucoup moins de ressemblance que dans b)

La classification d'après la valeur de fT indique en effet un groupe de transitions, dont celles entre noyaux miroirs, pour lesquelles $1000 < fT \leq 4000$ (groupe A de Konopinski). Ce sont les transitions permises et favorisées ou "super-permises". Indiquons les principales :

...

TABLEAU I

(Valeurs de f T et $\frac{T_0}{|M_\rho|^2}$ calculées par)

R. Bouchez (thèse).-

Noyau initial	J	Noyau final	J'	T	$T_0/\|M_\rho\|^2$
$^{1}_{0}n$	$\frac{1}{2}$	$^{1}_{1}H$	$\frac{1}{2}$	800 à 1600	800 à 160
$^{3}_{1}H$	$\frac{1}{2}$	$^{3}_{2}He$	$\frac{1}{2}$	1500 ± 150	1500 ± 150
$^{7}_{4}Be$	$\frac{3}{2}$	$^{7}_{3}Li$ fondam.	$\frac{3}{2}$	2000	I020
		$^{7}_{3}Li$ excité	$\frac{1}{2}$	3I60	
$^{11}_{6}C$	$\frac{3}{2}$	$^{11}_{5}B$	$\frac{3}{2}$	4050	2250 (+)
$^{6}_{2}He$	0	$^{6}_{3}Li$	1	570	1140
$^{10}_{6}C$	0	$^{10}_{5}B$	1	2000 (++)	
$^{12}_{5}B$	1	$^{12}_{6}C$	0	7350	4900
$^{18}_{9}F$	1	$^{18}_{8}O$	0	4000	2400
$^{26}_{13}A$	1	$^{26}_{12}Mg$	0	I980	1320

(++) Cf. [IO]

(+) La valeur de $T_0/|M_\rho|^2$ (cf. § 6I3) n'est pas très satisfaisante- Wigner fait une autre hypothèse sur la valeur de L, mai qui s'accorde mal avec le moment magnétique mesuré.

Toutes correspondent à des valeurs de Z petites. Si Z est grand, l'approximation de Wigner n'est plus valable, et toutes les transitions sont défavorisées.

Les autres transitions permises (groupes oB et oC de Konopinski) ont un $fT \simeq 10^5$ $10^4 < fT < 10^6$

Elles sont classées comme permises à cause des valeurs J, J', des parités, et de la forme du spectre.

6I3- Ceci conduit à indiquer les méthodes de détermination de J et de la parité.

J peut être mesuré pour le nuclide final lorsqu'il est dans l'état fondamental.

C'est le cas pour les J' du tableau précédent sauf celui du 7 Li excité, déterminé par la corrélation angulaire dans $^{10}_{5}B$ (n, α) $^{7}_{3}Li$, la méthode des corrélations angulaires s'appliquant aux états excités.

Pour le nuclide initial, il faut avoir l'isotope radioactif isolé, et la mesure n'est, en général, possible que pour les périodes assez longues.

Dans le tableau précédent, seul J de $^{3}_{1}H$ a été mesuré (T = 11 a.)

Dans les autres cas, un ensemble de règles semi-empiriques servent à déterminer J, et la parité.

Remarquons d'abord que nécessairement :

A pair $\longrightarrow$ J entier (composition des $\vec{l}$ entiers et d'un nb pair de $\vec{s}$)

A impair $\longrightarrow$ J demi-entier(" " " et d'un nb impair de $\vec{s}$)

D'autre part, la théorie des supermultiples de Wigner, et le modèle quasi-atomique conduisent aux règles suivantes :

1°) Z pair, N pair $\longrightarrow$ J = 0 (état fondamental) $\not$ est paire

Expérimentalement, bien établi par de nombreuses mesures.

2°) Z impair, N impair avec N = Z $\longrightarrow$ J $\neq$ 0 (entier) $\not$ paire.

Ceci est confirmé par les mesures de J pour :

$^{2}_{1}H$, $^{6}_{3}Li$, $^{10}_{5}B$, $^{14}_{7}N$, $^{22}_{11}Na$

J : 1 , 1 , 3 , 1 , 3

3°) Les noyaux miroirs ont même J
Une seule mesure, pour $^{3}_{1}H$, le confirme.

Les valeurs de J du tableau sont données d'après ces règles.

Pour $^{18}_{9}F$, $^{26}_{13}A$ on a seulement $J \neq 0$ et comme les transitions sont sûrement permises J = 1.

Si la règle 2°) était en défaut → J = 0, aucune transition ne serait incompatible avec les règles de sélection de Fermi. On n'a donc pas de preuve expérimentale <u>directe</u> qu'il faille les rejeter pour adopter celles de Gamow-Teller.

Aux preuves indirectes signalées, il faut ajouter les valeurs des éléments de matrice nucléaires pour les transitions super-permises (noyaux-miroirs).

On calcule facilement $|\int \vec{\sigma}|^2 = |\int \beta \vec{\sigma}|^2$ pour les transitions permises en admettant le couplage R-δ entre nucléon (cf. App.III).

Transition $J \longrightarrow J'$	$\lvert\int \vec{\sigma}\rvert^2$
$L+\frac{1}{2} \longrightarrow L+\frac{1}{2}$	$\frac{2L+3}{2L+1}$
$L+\frac{1}{2} \longrightarrow L-\frac{1}{2}$	$\frac{4L}{2L+1}$
$L-\frac{1}{2} \longrightarrow L+\frac{1}{2}$	$\frac{4L+4}{2L+1}$
$L-\frac{1}{2} \longrightarrow L-\frac{1}{2}$	$\frac{2L-1}{2L+1}$

Tableau II

...

Wigner et Feingold (non publié I948) ont montré que les variations de f T pour les noyaux miroirs s'accordent bien avec ces valeurs, non avec celles que l'on aurait pour $|\int 1|^2$ Toutefois, un mélange T (ou A) + V n'est pas exclu. R. Bouchez a calculé dans sa thèse les valeurs de $\frac{f T}{|\int \vec{\sigma}|^2} = \frac{T_0}{|M_f|^2}$ (dernière colonne Tableau I).

Pour les noyaux légers de A = 4 n + 2, on peut aussi calculer $|\int 1|^2$ et $|\int \vec{\sigma}|^2$ par des arguments généraux(+), mais l'accord avec les valeurs de f T est moins bon pour ces transitions favorisées : les 5 dernières du tableau (I).

6I4- Pour les transitions interdites des différents ordres on observe la même dispersion des f T.

Konopinski classe les interdites du Ier ordre en

1 A avec $f T \sim 10^5$ 1 C avec $f T \sim 10^7$

1 B " $f T \sim 10^6$

(comme pour les transitions permises, les groupes A,B,C, correspondent à des valeurs moyennes de Z croissantes).

Même en tenant compte des valeurs de Z et de ε_0 différentes, les groupes 0 et 1 se recouvrent partiellement.

Nous étudierons d'ailleurs le cas de $^{14}C \rightarrow {}^{14}N$ où $f T = 10^9$ avec cependant $\Delta J = 1'$. Cette transition devrait même être super-permise comme pour les autres noyaux légers de A = 4 n + 2. Elle a été expliquée par R. Bouchez [20] en admettant que $\Delta L = \ell$ avec la classification en ΔL, ΔJ.

La grande dispersion des valeurs de f T pour $\Delta J = 0$ ou 1 (non) s'explique évidemment par des valeurs très diverses de $|M|^2$ ou par le "recouvrement" très variable des fonctions d'onde ψ_f et $\beta \vec{\sigma} \psi_i$ La Valeur de ΔL, lorsqu'elle est définie, en est un facteur très important. Mais une classification où ΔL jouerait le rôle principal suppose que pour tous les noyaux, le couplage R-S est sensiblement réalisé. En fait, il faut, dans chaque cas particulier, confronter cette hypothèse avec les autres résultats connus sur les noyaux initial et final.

...

(+) N.F. II. p. 377-389.

En général, l'ensemble des résultats expérimentaux indiqu plutôt que l'on a : $\psi_i = \sum c_L \psi_L \; ; \; \psi_f = \sum c'_L \psi_L$ (I)

La classification en ΔL, comme celle en ΔJ seul, est donc, en général, trop simpliste. Il faut, en général, considérer la valeur ΔL correspondant aux plus grandes composantes et <u>toutes les valeurs inférieures</u> de ΔL, donnant des probabilités de transition plus élevées.

I- Si les valeurs de L prédominantes sont les plus petites ($L_0, L'_0 = 0$ ou 1), (1) introduit l'élément de matrice nucléaire $|c_{L_0} c'_{L_0}| < 1$ ce qui a pour effet d'augmenter f La combinaison d'états ayant différentes valeurs de L peut donc expliquer, comme le mélange de partitions, la dispersion des f T pour les transitions permises ($\Delta L = 0$) et interdites du Ier ordre ($\Delta L = 1$)(+).

2- Dans le cas contraire, qui se présente pour $\Delta L \geq 2$, (1) rend difficile la classification en ΔL. Nous en donnerons un exemple en discutant le cas de ^{14}C ($\Delta L = 2$).

Cette difficulté s'accroît quand ΔL augmente, ce qui rend très peu probable la validité, pour certaines transitions, de la classification en ΔL lorsque <u>$\Delta L > 2$</u>.

62- <u>Etude de quelques transitions</u>.-

62I- <u>Transition permise β^+ et capture</u> : $^{107}_{48}Cd$ (6,7 h)

Obtenu par : $^{107}_{47}Ag\,(d, 2n)\,^{107}_{48}Cd$

Le schéma de désintégration est le suivant (Bradt, Scherrer et al. [25]):

...

(+) Par ailleurs, la classification en ΔL n'apporte rien de nouveau dans ces cas :

$\Delta L = 0$ et $\Delta J = 0, 1$ correspond au cas classique $\Delta J = 0,1$ <u>non</u> (transitions permises)

$\Delta L = 1$ et $\Delta J = 0,1$ ou 2 " " " $\Delta J = 0,1$ ou 2 <u>ou</u>

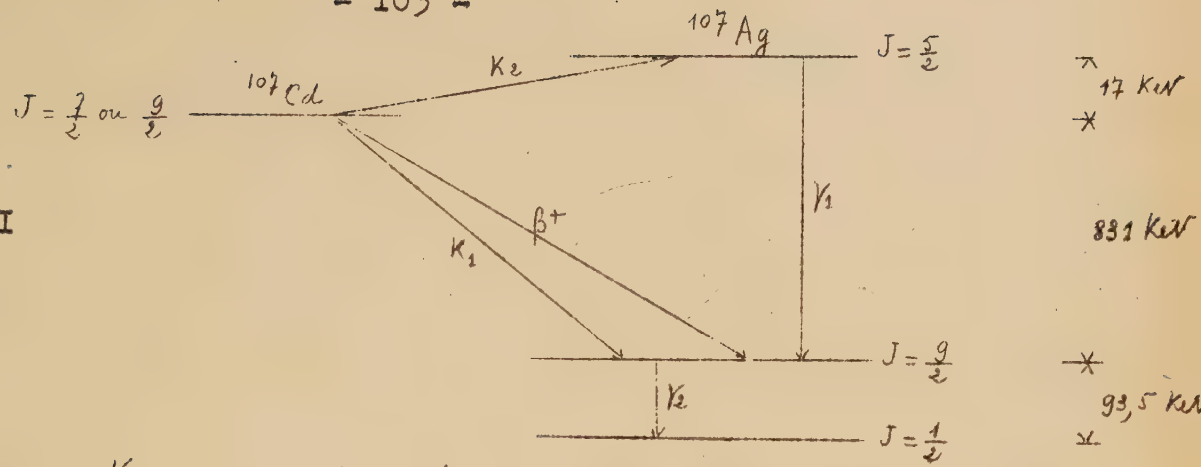


Fig.I

Capture K_2 0,42 % du total

" K_1 99,27 % " "

β^+ 0,3I % " " $E_0 = 320 \pm 10$ KeV

γ_1 846 KeV converti au niveau K $\frac{1}{1000}$

γ_2 93,5 " " à 99 % $\left(\frac{N_L}{N_K} \sim 1\right)$

La valeur élevée du rapport P_c/P_+ résulte de la faible valeur de E_0 (P_+ petit) et de la valeur assez élevée de Z :

$$P_c = \frac{g^2}{4\pi^2} |m|^2 (B_K + B_L) = \frac{|m|^2}{T_0} \cdot \frac{\pi}{2} (B_K + B_L) \qquad \text{(10 § 3I).}$$

$$\frac{\pi}{2} B_K = \pi \frac{1+\gamma_0'}{4\Gamma(2\gamma_0'+1)} (2\alpha Z_K)^3 (2\alpha Z_K R)^{2\gamma_0'-2} (\varepsilon_0 + \varepsilon_K)^2$$

avec $\varepsilon_K = \gamma_0' = \sqrt{1-\alpha^2 Z_K^2}$

$$\frac{\pi}{2} B_L = \pi \frac{4\gamma_0''+3}{8\Gamma(2\gamma_0''+1)} \left(\frac{2\alpha Z_L}{\sqrt{2\gamma_0''+2}}\right)^3 \left(\frac{2\alpha Z_L R}{\sqrt{2\gamma_0''+2}}\right)^{2\gamma_0''-2} (\varepsilon_0 + \varepsilon_L)^2$$

avec : $\gamma_0'' = \sqrt{1-\alpha^2 Z_L^2}$, $\varepsilon_L = \sqrt{\frac{1+\gamma_0''}{2}}$

$Z_K = Z - 0{,}3\ \#Z$ $\qquad Z_L = Z - 4{,}15$

$R = r_0 A^{1/3}$ avec $r_0 = 1{,}48 \times 10^{-13}$ cm $= 3{,}80 \times 10^{-3}$ en $\frac{\hbar}{mc}$

$R = 1{,}8 \times 10^{-12}$ cm $= 4{,}62 \times 10^{-2}$ en $\frac{\hbar}{mc}$

$(\alpha Z = 0{,}348 \quad , \gamma_0 = 0{,}936 \qquad \varepsilon_0 = 1{,}627)$

...

Il vient : $\frac{\pi}{2} B_K = 3,377$ $\frac{\pi}{2} B_L = 0,540$

$f_c = 3,917$ où la capture L représente 13,8 % à cause de la valeur assez élevée de Z.

$$f_+ = \frac{1+\gamma_0}{2} \frac{4}{[\Gamma(2\gamma_0+1)]^2} \int_1^{\varepsilon_0} p q^2 (2pR)^{2\gamma_0-2} e^{\frac{\pi\alpha 2\varepsilon}{p}} \left|\Gamma\left(\gamma_0 + i\frac{\alpha 2\varepsilon}{p}\right)\right|^2 d\varepsilon$$

est donné par des tables numériques [26] $\Gamma(2,872) = 1,78$.

Nous avons tracé par points la courbe $\frac{df_+}{d\varepsilon}$ en fonction de ε (ε de 0,1 en 0,1) et pris l'aire au planimètre d'où : $f_+ = 8,96 \times 10^{-3}$

A l'époque où nous avons fait le calcul, il n'existait pas de table pour la fonction $|\Gamma()|$ d'argument imaginaire.

Nous avons utilisé la formule donnant $|\Gamma()|$ par un produit infini : $\Gamma(x+1+iy) = h\, e^{i\eta}$

$$h = \frac{x!}{\prod_{n=1}^{\infty} r_n} \quad \text{où} \quad x! = \Gamma(x+1) \quad \text{et} \quad r_n = \sqrt{1 + \frac{y^2}{(x+n)^2}}$$

en arrêtant le produit lorsque r_n est assez voisin de 1.

Un premier travail du National Bureau Of Standards de Washington a été publié depuis [27], qui donne la fonction :

$$F(Z, p) = p^{2\gamma_0} e^{\frac{\pi\alpha Z\varepsilon}{p}} \left|\Gamma\left(\gamma_0 + i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p}\right)\right|^2 \qquad Z \leqslant 0$$

$$F(Z, p) = \frac{\left[\Gamma(2\gamma_0+1)\right]^2}{4(2R)^{2\gamma_0-2}} p^2 F_0(Z,\varepsilon)$$

est appropriée au problème de la distribution des électrons par intervalle d'impulsion $dp : \varepsilon d\varepsilon = p\,dp$

$$P_1(p) = \frac{|m|^2}{T_0} \frac{1+\gamma_0}{2} p^2 q^2 F_0(Z,\varepsilon)$$

Les valeurs de F (Z , p) sont données pour des valeurs de Z de - 100 à + 100, de 10 en 10 - et pour plusieurs valeurs de p de 0 à 7.

Dans le cas actuel, nous obtenons par interpolation des valeurs en accord, à 1 % près, avec celles que nous avions calculées. Nous donnons le spectre théorique (Fig.2) et le spectre expérimental.

Nous avons porté en ordonnée :

$$I(\varepsilon) = \varepsilon p q^2 p^{2\gamma_0-2} e^{\frac{\pi\alpha Z\varepsilon}{p}} \left|\Gamma\left(\gamma_0 + i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p}\right)\right|^2 \qquad \text{pour} \quad Z = -47$$

$$P_1(\varepsilon) = \frac{1+\gamma_0}{2} \frac{4}{\left|\Gamma(2\gamma_0+1)\right|^2} (2R)^{2\gamma_0-2} I(\varepsilon) = 1{,}8635\, I(\varepsilon)$$

En définitive $\left|\frac{f_c}{f_+} = 436 \qquad \left(\frac{f_K}{f_+} = 377\right)\right.$ (+)

$$f = f_c + f_+ = 3{,}926 \qquad T = 6{,}7\,h. = 2{,}41 \times 10^4\,s.$$

$$fT = 9{,}46 \times 10^6 = \frac{T_0}{|m|^2}$$

Remarque :

Dans [27] sont indiquées les erreurs commises en prenant diverses formules approchées pour F (Z , p) dans le cas Z > 0.

1°) L'approximation non relativiste, donnée par Kürie, Richardson et Paxton : $F_N(Z, p) \simeq p^2 \frac{2\pi y}{1-e^{-2\pi y}} = p^2 e^{\pi y} \frac{\pi y}{\mathrm{sh}\,\pi y}$

où $y = \frac{\alpha Z\varepsilon}{p} = \frac{Ze^2}{\hbar v}$ peut être prise pour $Z \leqslant 29$ jusqu'à $p \simeq 5$ avec une erreur < 3 %.

2°) L'approximation donnée par Bethe et Bacher ([12] p.194) puis par Longmire et Brown :

(+) Bradt et al. trouvent, en prenant une expression approchée de f_+ une valeur théorique $f_K/f_+ = 340$, et une valeur expérimentale $\frac{f_c}{f_+} = 320$. Nous estimons à 2 % la précision de nos valeurs.

$$F(Z,p) \simeq F_N(Z,p)\, p^{2\gamma_0-2}\left(\gamma^2+\frac{1}{4}\right)^{\gamma_0-1} \simeq F_N(Z,p)\left[\frac{\varepsilon^2(1+4\alpha^2Z^2)-1}{4}\right]^{\gamma_0-1}$$

donne une erreur 1 % jusqu'à $Z \leq 60$ (et une déformation du spectre < 1 % jusqu'à $Z = 80$ où l'erreur est 3 %).

La forme des spectres β^+ ($Z < 0$ fig.2) et β^- ($Z > 0$ fig.4,5) aux basses énergies apparaît sur cette formule.

Quand $p \longrightarrow 0$, $\varepsilon \longrightarrow 1$ $\quad F_0 = \frac{F}{p2} \sim \frac{2\pi\gamma}{1-e^{-2\pi\gamma}}\,|\alpha Z|^{2\gamma_0-2}$

$Z < 0$ $\quad F_0 \longrightarrow 0$ comme $\frac{2\pi|\gamma|}{e^{2\pi|\gamma|}}$ mais, en fait, l'effet d'écran des électrons atomiques est important.

$Z > 0$ $\quad F_0 \simeq 2\pi\frac{\alpha 2\varepsilon}{p}(\alpha 2)^{2\gamma_0-2} \longrightarrow \infty$, $\quad \varepsilon p\, q^2 F_0 \longrightarrow 2\pi(\varepsilon_0-1)^2(\alpha 2)^{2\gamma_0-1}$

622- Transition β^- interdite du 2ème ordre avec $\Delta J = 3$ $\quad {}^{10}_{4}Be$

Ce cas a été signalé par Marshak, qui a annoncé son calcul dans une lettre à l'éditeur [24], Nous l'avons refait (publication [10] avec R. Bouchez).

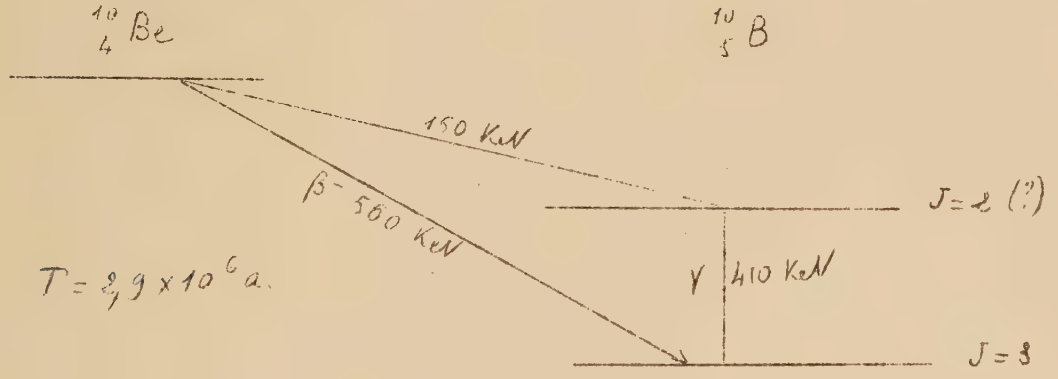


Fig. 3

Il semble que le spectre soit complexe : composante molle ($E_0 = 150$ KeV) de très faible intensité, que nous négligerons

$J = 0$ pour $^{10}_{4}Be$ d'après les règles générales.

$J = 3$ pour $^{10}_{5}B$ a été mesuré par Gordy et al. [28]

$n = 2$ pas de changement de parité, en accord avec les règles générales

$^{10}_{4}Be$ et $^{10}_{5}B$ sont pairs.

...

Nous avons fait le calcul avec les formules (6), (6)' du § 32. Nous donnons (fig.4) la forme du spectre théorique. Par rapport au spectre "permis" de même E_0, indiqué sur la même fig., le maximum est décalé vers les grandes énergies, parce que le facteur correctif $\frac{B_2(\varepsilon, Z)}{\varepsilon p q^2}$ croît avec ε, au lieu de décroître comme F_0

$$\frac{T_0}{\rho_J |m_n|^2} = f_2 T = 3.140 \quad \text{puisque } T = 8{,}5 \times 10^{13} \text{ sec et}$$

$$f_2 = \frac{1}{(1+3\times 5)^2} \int_1^{\varepsilon_0} B_2(\varepsilon, Z)\, d\varepsilon = 3{,}685 \times 10^{-11}$$ au planimètre.

$$\rho_J = 7 \text{ ici} \longrightarrow \frac{T_0}{|m_n|^2} = 2{,}2 \times 10^4$$

du même ordre que pour les transitions permises tandis que fT est évidemment beaucoup plus grand :

Le spectre calculé est en bon accord avec le spectre expérimental déterminé plus tard [29].

623- Transition β^- avec $\Delta L = 2$ et $\Delta J = 1$: $^{14}_{6}C$

C'est l'interprétation donnée par R. Bouchez qui suppose $\Delta L = 2$ assez bien défini [20]

Feldman et Wu [30] ont déterminé l'énergie maxima $E_0 = 155 \pm 1$ KeV $\longrightarrow$ $\varepsilon_0 = 1{,}303$ et la période $T = 5720 \pm 47$ a de la transition $^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N + {}^-$

Pour ^{14}C, J a été mesuré par Jenkins [3I] : $J = 0$ conformément à la Ière règle. Pour ^{14}N il était connu depuis longtemps (spectre de bandes de N^2) : $J = 1$

Pour une transition permise, la valeur de $fT = 1{,}06 \times 10^9$ serait anormalement élevée, surtout pour un noyau léger.

R. Bouchez a admis que ces nuclides ont des états orbitaux bien définis $^1S_0 \longrightarrow {}^3D_1$: $\Delta L = 2$

$$\downarrow \qquad \uparrow\uparrow$$

alors : $$^2P_1(\varepsilon) = |G_1'''|^2 + |G_2'' + G_2'|^2 + |G_3|^2$$

$$|G_1'''|^2 = \frac{g^2}{2\pi^3} \rho_J \left| m_2''' \left(\frac{\alpha Z}{2} + \frac{qR}{3} \right) + P_2''' \frac{qR}{3} \frac{\alpha Z}{2} \right|^2 \varepsilon p q^2 \frac{1+\gamma_0}{2} F$$

...

d'après (9) § 44 , $|m_2'''| \sim \frac{v}{c}|\mathcal{P}_2'''| \sim \frac{v}{c}|m_2|$

Comme $qR < (\varepsilon_0 - 1)R = 2{,}77 \times 10^{-3}$ et $\frac{v}{c} \simeq 0{,}2$

on voit que : $\mathcal{P}_2''' \frac{qR}{3} \frac{\alpha Z}{2} \ll m_2''' \left(\frac{\alpha Z}{2} + \frac{qR}{3}\right)$

D'ailleurs $\frac{\alpha Z}{2} = 3{,}55 \times 10^{-2} \gg \frac{(\varepsilon_0 - 1)R}{3} = 0{,}92 \times 10^{-3}$

de sorte que : $m_2'''\left(\frac{\alpha Z}{2} + \frac{qR}{3}\right) \# m_2''' \frac{\alpha Z}{2}$ et que $|G_1'''|^2$

se réduit sensiblement à :

$$\frac{q^2}{2\pi^3} \rho_J |m_2'''|^2 \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 \cdot p q^2 \frac{1+\gamma_0}{2} F_0 \simeq \frac{q^2}{2\pi^3} \rho_J |m_2|^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 \cdot p q^2 \frac{1+\gamma_0}{2} F_0 \quad (1)$$

De même :

$$(2)\begin{cases} |G_2'' + G_2'|^2 \leq \left(\frac{v}{c} + \frac{\alpha Z}{2}\right)^2 \frac{(\varepsilon^2-1)R^2}{9} P_1 \simeq \frac{1}{9} \times 5{,}03 \times 10^{-2} \times 5{,}85 \times 10^{-5} P_1 = 3{,}3 \times 10^{-7} P_1 \\ |G_2'' + G_2'|^2 \ll |G_1'''|^2 \simeq 3{,}6 \times 10^{-5} P_1 \end{cases}$$

$$|G_3|^2 \simeq \frac{(\varepsilon^2-1)^2 R^4}{225} \cdot P_1 = 1{,}52 \times 10^{-11} P_1 \ll |G_1'''|^2 \simeq 3{,}6 \times 10^{-5} P_1$$

En résumé, nous pourrons considérer seulement :

$$\underline{|G_1'''|^2 = \frac{q^2}{2\pi^3} \rho_J |m_2''|^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 \cdot p q^2 \left(1 + \frac{7R}{3\alpha Z}\right) \frac{1+\gamma_0}{2} F_0} \quad (3)$$

En négligeant le terme en $\mathcal{P}_2'''$ (erreur $\simeq 1$ %), et en considérant plutôt les rapports des éléments de matrice à $m_2''|G_2'' + G_2'|$ est donné par (9) du § 43 pour la partie M = J $\longrightarrow$ M' = J'-1 (Δ M = 2) Ici M = J = 1 $\longrightarrow$ M'=J'=0

Δ M = 1 seul nous intéresse.

(suivant nos conventions, on considère la transition inverse avec $\rho_J = 3$).

D'après (2) $|G_2'' + G_2'|^2 \simeq \frac{1}{100} \cdot |G_1'''|^2$

Si nous considérons pour l'instant l'ordre de grandeur de $f_2 T$ nous pouvons prendre pour $|G_1'''|^2$ l'expression (1) (avec une erreur < 9,5 %) :

$$\underline{|G_1'''|^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 P_1(\varepsilon)}$$

...

P_1 (ε) correspondant à une transition permise nous donne le spectre théorique (1 fig.5) avec : $f = 0{,}59 \times 10^{-2}$

D'où $f_2 \simeq \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 f = 2{,}6 \times 10^{-5} f = 1{,}53 \times 10^{-7}$ $\quad fT = 1{,}06 \times 10^9$

$f_2 T \simeq 2{,}76 \times 10^4$ avec $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 4 \times 10^{-2}$ $\left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 = 0{,}5 \times 10^{-6}$; $T = 1{,}8 \times 10^{11}$.

Si nous prenons plutôt $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 3 \times 10^{-2}$, $f_2 T \simeq 2{,}1 \times 10^4$

En gros : $f_2 T = \frac{T_0}{C |m_2''|^2} \simeq 2{,}5 \times 10^4$ (4)

Cette valeur de $\frac{T_0}{|m_2|^2} \simeq 10^5$ convient tout à fait si on la rapproche des valeurs obtenues pour ^{107}Cd, ^{10}Be c'est la valeur de $T_0/|m|^2$ pour les transitions permises non favorisées. Au point de vue de l'élément de matrice nucléaire $|m_n|^2$ une transition interdite est en effet sûrement non favorisée au sens de Wigner, puisque, ici : $m_n = \int Y_n \beta \vec{\sigma}$ où l'opérateur contient les coordonnées d'espace angulaires, et change donc la partition.

Cependant , cette explication de la transition $^{14}C \rightarrow {}^{14}N$ suppose que le couplage R.S est réalisé avec une grande approximation pour ces 2 noyaux :

^{14}C $\quad \psi = a_0 \Phi_0 + (a_1 \Phi_1) + a_2 \Phi_2 + (a_3 \Phi_3) + a_4 \Phi_4 + \ldots$

^{14}N $\quad \psi' = a_0' \Phi_0' + (a_1' \Phi_1') + a_2' \Phi_2' + (a_3' \Phi_3') + a_4' \Phi_4' + \ldots$

pour les différentes valeurs de L combinées.

Les termes soulignés sont prépondérants : $|a_1| \simeq |a_2'| \simeq 1$

Les termes $(a_1 \Phi_1)$, $(a_3 \Phi_3)$ . . . sont petits par rapport aux autres, uniquement dûs aux effets Relativistes :

$a_1 \simeq \frac{v}{2c} a_0$ ou $\frac{v}{2c} a_2$; $a_1' \simeq \frac{v'}{2c} a_0'$ ou $\frac{v'}{2c} a_2'$, etc . .

Comme la transition permise ($\Delta L = 0$) est $\sim 4 \times 10$ fois plus probable que la transition considérée, il faut que :

$|a_0'|^2 \leq \frac{1}{4 \times 10^4}$ $\quad |a_2|^2 \leq \frac{1}{4 \times 10^4}$ $\quad |a_4|^2, |a_4'|^2 \leq \frac{1}{2 \times 10^2}$ etc . . . $\quad \ldots$

$|a_1|^2, |a'_1|^2 \lesssim \frac{1}{2\times10^2}$ est bien approximativement vérifié même si : $|a_1|^2 = \frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2} \simeq 10^{-2}$ et $|a'_1|^2 \simeq 10^{-2}$

Les renseignements que l'on a sur d'autres noyaux légers (^7Li par exemple) ne semblent pas indiquer que le couplage R - S soit aussi bien réalisé.

D'autre part, cette hypothèse semble contredite (dès que A > 2) par le fort couplage spin-orbite actuellement admis dans beaucoup de théories (M. Goeppert-Mayer, Pais).

Elle ne semble même pas compatible avec les forces tensorielles nécessaires pour rendre compte des propriétés du dentéron et qui conduisent pour ^3_1H à $|a_2|^2 \sim \frac{4}{100}|a_1|^2$

Elle n'est pourtant pas complètement exclue. Il pourrait se former dans certains noyaux comme ^{14}C, ^{14}N, des condensations à symétrie sphérique (particules α par exemple) ou des couches exerçant des forces pluri-particulaires à symétrie sphérique.

Pour ^{14}N, il y a des recoupements possibles : les valeurs mesurées des moments magnétique et quadripolaire.

La valeur du moment magnétique ne parait pas bien s'accorder avec un état pur L = 2.

Mais, ces calculs sont encore trop incertains à cause des termes d'échange mésique inconnus.

On peut évidemment chercher à expliquer cette transition avec la classification en ΔJ seul, en prenant n = 1, $\Delta J = 1$:

Changement de parité et $^1P_1 = |G'_1 + G''_1|^2 + |G_2|^2$

$$|G'_1 + G''_1|^2 = \frac{g^2}{2\pi^3}\rho_J\, \varepsilon\rho q^2 F_0 \left| m'_1 + m''_1\left(\frac{\alpha Z}{2} + \frac{qR}{3}\right)\right|^2 \quad \text{(interaction T)}$$

$$= \frac{g^2}{2\pi^3}\rho_J |m''_1|^2 \left[\frac{v}{c} \pm \left(\frac{\alpha Z}{2} + \frac{qR}{3}\right)\right]^2 \varepsilon\rho q^2 F_0 \qquad (5)$$

$$|G'_1 + G''_1|^2 \simeq \left(\frac{v}{c} \pm \frac{\alpha Z}{2}\right)^2 P_1 = \begin{cases} 5\times10^{-2} \\ 3\times10^{-2} \end{cases} \cdot P_1$$

$$|G_2|^2 \simeq \frac{(\varepsilon_s^2 - 1)R^2}{9} P_1 = 6{,}5\times10^{-6} P_1 \ll |G'_1 + G''_1|^2$$

...

Nous pouvons considérer seulement $|G_1' + G_1''|^2$ et même prendre (avec une erreur < 6 %) : $|G_1' + G_1''|^2 = \left(\frac{v}{c} \pm \frac{\alpha Z}{2}\right)^2 P_1(\varepsilon)$

Le sepctre obtenu est ici très voisin de la forme (1) permise et $f_1 = \begin{cases} 5 \times 10^{-2} \\ 3 \times 10^{-2} \end{cases}$ $f = \begin{cases} 2{,}95 \times 10^{-4} \\ 1{,}77 \times 10^{-4} \end{cases}$

$f_1 T = \begin{cases} 5{,}3 \times 10^7 \\ 3{,}2 \times 10^7 \end{cases}$ valeur trop élevée pour $\frac{T_0}{\rho_J |m_1|^2}$

Mais nous sommes dans le cas où la forme de l'interaction a une grande influence, et si nous prenons A : $^1P_1 = |^A G_1''|^2 +$

$$|^A|G_1''|^2 = \frac{g^2}{2\pi^3} \rho_J |\mathscr{L}_n''|^2 \varepsilon p q^2 F_0 \left(\frac{\alpha Z}{2} - \frac{qR}{5}\right)^2 \quad (6)$$ d'après (I) § 5

Avec une erreur $\lesssim$ 8 % nous pouvons prendre :

$^1P_1 = \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 P_1 \longrightarrow f_1 = 6{,}5 \times 10^{-4}$ $f = 3{,}84 \times 10^{-6}$ $f_1 T = 6{,}9 \times 10^5$

valeur grande, mais encore acceptable.

Cependant, cette explication conduirait à admettre qu $^{14}_{7}N$ est un noyau <u>impair</u> contrairement à la règle 2° du § 6I3 et au <u>modèle quasi atomique</u> (+)

Les déviations par rapport à la forme des spectres permis sont sensiblement de même importance dans les 2 cas, mais en sens inverse, la forme avec T étant sensiblement donnée par (3) : courbe 2 de la fig. 5, et la forme avec A par (6): courbe 3 de la fig. 5 (les erreurs commises en prenant (3) et (restent < 2 % dans les 2 cas).

Les expériences de Warshaw indiquent des écarts entre les points expérimentaux et la droite de Kurie trop faibles pour qu'on puisse les attribuer à d'autres causes que des effet secondaires [32] .

R. Bouchez a aussi signalé dans sa Thèse la transitio analogue $^{32}_{15}P \longrightarrow {}^{32}_{16}S + e^-$ dont le spectre a été déterminé depuis par Warshaw et al. [33] .

(+) Mr. Weisskopf nous a signalé que la question avait été disc tée par différents auteurs aux U.S.A., dans des travaux non encore publiés. Nordheim (I950) a signalé l'influence de L en général. Pour ^{14}C, il semble que la plupart des auteurs, en particulier Mr Weisskopf dans son cours, admettent la 2ème explication : ^{14}N impair contrairement au modèle quasi-atomique. D'après notre calcul, ceci conduit à choisir <u>l'interaction A</u> au lieu de T.

$E_o = 1,708 \pm 0,008$ MeV ; $T = 14,0$ s $\rightarrow$ $\underline{fT \simeq 8,6 \times 10^7}$

alors que J $\left(^{32}_{16}S\right)$ = 0 et J $\left(^{32}_{15}P\right)$ = 1, et que, en 1ère approximation, le spectre est de forme permise. En fait, d'après Warshaw et al , la forme anormale au-dessous de 300 keV indique une composante molle de 330 keV ; les γ de 1,378 MeV correspondant à la transition $^{32}S^* \rightarrow {}^{32}S$, non observés, seraient complètement convertis (niveau $^{32}S^*$ de J = 0).

Les mesures de Siegbahn n'indiquaient pas cette forme anormale.

Ici : $\frac{\alpha Z}{2} = 5,83 \times 10^{-2} \longrightarrow \left(\frac{v}{c}\right)\left(\frac{\alpha Z}{2}\right) \simeq 1,17 \times 10^{-1}$

$\varepsilon_o = 4,34$ en négligeant la composante molle éventuelle

$R = 1,2 \times 10^{-2}$

Si nous prenons : $^2P_1 = |G_1'''|^2 + |G_2'' + G_2'|^2 + |G_3|^2$

$|G_1'''|^2 \simeq 1,36 \times 10^{-4} P_1$

$|G_2'' + G_2'|^2 \simeq \left(\frac{v}{c} \pm \frac{\alpha Z}{2}\right)^2 \frac{(\varepsilon_o^2 - 1) R^2}{9} P_1 = \left\{\begin{matrix} 6,75 \times 10^{-2} \\ 1,30 \times 10^{-2} \end{matrix}\right\} \times \frac{3,58 \times 10^{-3}}{9} \times P_1$

$\simeq \left\{\begin{matrix} 1,93 \times 10^{-5} \\ 5,6 \times 10^{-6} \end{matrix}\right\} \cdot P_1$

$|G_3|^2 \simeq \frac{(\varepsilon_o^2 - 1)^2 R^4}{225} P_1 = 3 \times 10^{-7} P_1$ négligeable

Au total : $^2P_1 \simeq \left\{\begin{matrix} 1,56 \times 10^{-4} \\ 1,42 \times 10^{-4} \end{matrix}\right\} P_1$

$f_2 T \simeq 1,5 \times 10^{-4} fT = \underline{1,3 \times 10^4}$ valeur convenable.

Mais, ici, la forme du spectre s'écarterait notablement de la forme permise :

...

Lorsqu'on néglige $\frac{q}{3}R \leq \frac{(\varepsilon-1)R}{3} = 1{,}34 \times 10^{-2}$ devant $\frac{\alpha Z}{2}$, dans le terme en m''_2, l'écart peut atteindre 46 %

Le fait de négliger le terme en $\Gamma''_2 \frac{qR}{3} \cdot \frac{\alpha Z}{2}$ devant le terme en m''_2 peut conduire à un écart de $\simeq$ 14 %.

Enfin, le fait de négliger $|G''_2 + G'_2|^2$ dans le cas où l'on a $(\frac{v}{c} + \frac{\alpha Z}{2})$ donne un écart $\simeq$ 14 % également.

Cependant, les deux Iers atteignent cette valeur à l'extrémité inférieur du spectre, où la composante molle interviendrait, et s'annulent à l'extrémité supérieure, de sorte que l'expérience ne permet pas encore de trancher la question. Il ne semble pas cependant que les écarts expérimentaux à la forme permise puissent atteindre la valeur prévue dans cette hypothèse.

Avec l'hypothèse $\Delta J = 1$, $\underline{I\ I' = -1}$, c'est-à-dire :

$^1P_1 = |G'_1 + G''_1|^2 + |G_2|^2$ forme d'interaction T

$|G'_1 + G''_1|^2 \simeq (\frac{v}{c} \pm \frac{\alpha Z}{2})^2 \cdot P_1 = \left\{ \begin{array}{l} 6{,}75 \times 10^{-2} \\ 1{,}96 \times 10^{-2} \end{array} \right\} P_1$

$|G_2|^2 \simeq \frac{(\varepsilon^2-1)R^2}{9} \cdot P_1 = 2{,}9 \times 10^{-4}\ P_1$

$^1P_1 \simeq \left\{ \begin{array}{l} 6{,}8 \times 10^{-2} \\ 2 \times 10^{-2} \end{array} \right\} P_1 \longrightarrow f_1 T \simeq \left\{ \begin{array}{l} 6{,}80 \times 10^{-2} \\ 2 \times 10^{-2} \end{array} \right\} fT$

$f_1 T \simeq \left\{ \begin{array}{l} 5{,}9 \times 10^6 \\ 1{,}7 \times 10^6 \end{array} \right.$ Valeurs un peu grandes.

Comme précédemment, la forme A abaisse la valeur de

$^1P_1 = |A G''_1| + |G_2|^2$

$|A G''_1|^2 \simeq (\frac{\alpha Z}{2})^2 P_1 = 3{,}4 \times 10^{-3}\ P_1$

$^1P_1 \simeq 3{,}7 \times 10^{-3}\ P_1 \longrightarrow \underline{f_1 T \simeq 3{,}2 \times 10^3}$

...

Ici encore la forme s'écarterait notablement de la forme permisè : en négligeant $q\frac{R}{3}$ devant $\frac{\alpha Z}{2}$ dans (6) l'écart pourrait atteindre 46 %, mais en moins.

La fait de négliger $|G_2|^2$ donne un écart $\simeq 8,5$ %

Par ailleurs, les difficultés sont les mêmes que pour ^{14}C dans les deux hypothèses.

624- CONCLUSION.-

1°) Pour les transitions permises et les transitions interdites d'ordre n avec $\Delta J = n + 1$ (+) (I I' = $(-1)^n$) les résultats de la théorie (forme du spectre, rapport P_c) ne dépendent pas du choix de l'interaction nucléon-leptons, ni des hypothèses sur le couplage spin-orbite dans les noyaux; ils sont sensiblement en accord avec les résultats expérimentaux, ce qui démontre l'exactitude des hypothèses fondamentales : émission d'un électron et d'un neutrino (celui-ci de masse au repos $\neq 0$) obéissant aux équations de Dirac. (spin $\frac{1}{2}$)

Les transitions de ^{10}Be (J = 3), de ^{90}Y, ^{89}Sr, ^{91}Y, ^{90}Sr, ^{137}Cs ($\Delta J = 2$) sont de ce type.

La dispersion des valeurs de $f_n T$ résulte de notre ignorance sur les éléments de matrice nucléaires, et n'est pas en désaccord avec ces hypothèses.

Si ces transitions ne permettent pas de préciser la combinaison de S,A,P, ou V,T, à choisir, elles permettent d'exclure des interactions d'un autre type général, comme celle proposée autrefois par Konopinsky et Uhlenbeck, contenant les dérivés par rapport à t des fonctions d'onde des leptons.

2°) Les autres transitions interdites d'ordre n peuvent dépendre , au point de vue théorique :

a) principalement de l'hypothèse que l'on a un couplage R-S dans les noyaux : les transitions interdites d'ordre n ($\Delta L = n$) avec $J \leq n-1$ n'existent que si cette hypothèse est réalisée avec une grande approximation.

La transition $^{14}C \longrightarrow ^{14}N$ semble de ce type, mais cela n'est pas certain.

(+) Pour lesquelles electron et neutrino émis forment un système dans l'état singulet $^1\downarrow$

b) du choix exact de l'interaction nucléon-leptons. C'est le cas des transitions interdites d'ordre n avec $\Delta J = n$ (+) L'étude expérimental des transitions de ce type (forme du spectre, rapport P_c/p_+, période.)doit permettre de préciser complètement la forme de l'interaction: ^{14}C serait de ce type si l'on rejette l'hypothèse d'un couplage R-S bien réalisé, et conduirait à choisir une forme où A prédomine.

Mais, il faut plutôt étudier des transitions qui sont sûrement de ce type. L'une d'elle a fait l'objet de plusieurs travaux : $^{36}_{17}Cl \rightarrow {}^{36}_{18}A + e^-$

On avait signalé un autre mode de désintégration de $^{36}_{17}C$: $^{36}_{17}Cl \rightarrow {}^{36}_{16}S + e^+(K)$

(cette double possibilité existe pour certains nuclides de A pair, tels ^{64}Cu).

Mais les plus récentes mesures de Wu, Townes et Feldman [34] indiquent que le rapport $\frac{P+}{P-} < 10^{-4}$

Ils trouvent $T = (0,44 \pm 0,05) \times 10^6$ a, pas de γ Wu et Feldman [35] ont déterminé la forme du spectre et $E_0 = 713$ KeV

La transition conduit à l'état fondamental de ^{36}A (pas de γ) dont J = 0 (règle 1°).

Ces auteurs ont pensé que la transition était très analogue à $^{10}Be \rightarrow {}^{10}B$ période et E_0 étant du même ordre dans les 2 cas : n = 2, $\Delta J = 3$

Effectivement , le facteur correctif $D_2(\varepsilon, Z) = \frac{B_2(\varepsilon, Z)}{\varepsilon p q^2 F_0}$ conduit à un bon accord avec la forme expérimentale.

Mais Townes C.H. et Aamodt L.C. [36] ont déterminé par la suite (structure hyperfine d'un spectre moléculaire) J (^{36}Cl) = 2 et non 3.

On a donc n = 2, $\Delta J = 2$ permettant de préciser l'interaction. Malheureusement, il est difficile d'en déterminer une qui convienne à la forme de spectre observée.

(+) Le terme prédominant $|C'_n + C''_n|^2$ correspond à un état triplet pour l'ensemble électron-neutrino ↑↑

$$T \longrightarrow |G_2'' + G_2'|^2 + |G_3|^2$$

$$A \longrightarrow |A G_2''|^2 + |G_3|^2$$

$|G_3|^2$ correspond bien au facteur correctif D_2 mais les termes en G_2 beaucoup plus grands, au facteur $D_1 = \frac{B_1(\varepsilon, 2)}{\varepsilon p q^2 F_0}$
Ces termes sont plus petits avec A : $|G_2'' + G_2'|^2 \simeq \left(\frac{v}{c} \pm \frac{\alpha Z}{2}\right)^2 |G_2|^2 \gtrless |A G_2''|^2 \simeq \left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 |G_2|^2$
où $\frac{v}{c} \simeq 20 \times 10^{-2} \gg \frac{\alpha Z}{2} = 6{,}2 \times 10^{-2}$, et même dans ce cas :
$|A G_2''|^2 \simeq 3{,}85 \times 10^{-3} |G_2|^2 \gg |G_3|^2 \simeq 8{,}28 \times 10^{-5} |G_2|^2$
puisque : $\frac{(\varepsilon_0^2 - 1) R^2}{9} = 8{,}28 \times 10^{-5}$ ici

Toute forme d'interaction sans combinaison est donc exclue. C'est aussi la conclusion de Longmire, Wu et Townes [37].

Ces auteurs assgent alors des combinaisons des interactions :

(S, A) qui comprend celle de Critchfield S-A-P (P=0)

(V, T)

(S, T)

(V, A)

Les deux premières satisfont au principe proposé par de Groot et Tolhock, et toutes aux relations $C_T C_A = 0$ $C_S C_V = 0$, d'abord indiqués par Fierz [38], imposées par l'expérience.

Ils trouvent que (S,A) est exclue) (V,T) est possible mais la combinaison ajustée à l'expérience est assez artificielle; (S,T) et (V,A) sont plus satisfaisantes.

Tous ces calculs sont faits sans admettre aucune estimation des rapports des éléments de matrice nucléaires, de sorte que leurs résultats sont des relations entre ces éléments et les C_S, C_T etc..., qui ne déterminent pas ces derniers coefficients.

...

Nos calculs précédents sont insuffisants pour cette étude, les termes croisés $^{S}G\ ^{T}G$ etc... étant ici très importants.

Il est en tout cas nécessaire de déterminer avec précision la forme du spectre dans d'autres cas analogues, éliminant ainsi les relations fortuites entre éléments de matrice nucléaires, pour pouvoir conclure définitivement sur la forme d'interaction nucléon-leptons.

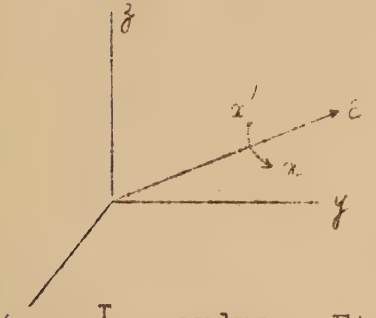
En particulier, l'étude expérimentale de transitions β^+ avec capture K, de ce type, serait très utile, la valeur expérimentale de $\frac{P_K}{P_+}$ fournissant une relation supplémentaire.

APPENDICE I

I- Nous avons indiqué au § I2I la définition et les propriétés générales du moment cinétique en théorie quantique.

L'opérateur qui le représente est lié aux rotations infinitésimales dans l'espace.

II- Une particule de spin s = 0 est représentée par une fonction d'onde scalaire $\psi(\vec{x},t)$



Effectuons sur l'espace $\vec{x}$ une rotation infinitésimale représentée par : $-\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}\, du$ ($\vec{\omega}$ rotation "instantanée", le temps étant remplacé par le paramètre u).

Chaque point $\vec{r} \to \vec{r}' : \vec{x} - \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}$ au Ier ordre. Et effectuons cette rotation sur le champ scalaire c'est-à-dire que nous prenons $\psi'(\vec{r}') = \psi(\vec{r})$

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}' + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{x}') = \psi(\vec{x}') + \begin{cases} (\varepsilon_y z' - \varepsilon_z y') \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x'} \\ (\varepsilon_z x' - \varepsilon_x z') \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y'} \\ (\varepsilon_x y' - \varepsilon_y x') \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_{z'} \end{cases}$$

ou : $$\psi'(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) + \varepsilon_x \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi + \varepsilon_y \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi + \varepsilon_z \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\psi' = \psi + \vec{\varepsilon} \left(\vec{x} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\right) \psi = \psi + \frac{i}{\hbar} \vec{\varepsilon} (\vec{x} \wedge \vec{p}) \psi$$

avec $\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \overrightarrow{\text{grad}}$ représentant l'impulsion.

$\vec{x} \wedge \vec{p} = \vec{M}$ d'où $\psi' = \psi + i \vec{\varepsilon} \vec{L} \psi$ (1)

...

On obtiendrait évidemment le même résultat en supposant que les axes de coordonnées ont subi la rotation $\vec{\varepsilon}$ et que $\vec{x'}$ représente les nouvelles coordonnées d'un point dont les anciennes étaient $\vec{x}$

Si l'on a p particules de spin 0 représentées par $\psi(\vec{x_1}, \vec{x_2} \ldots \vec{x_p}, t)$ et si l'on effectue sur les espaces $\vec{x_1} \ldots \vec{x_p}$ la même rotation infinitésmale $-\vec{\varepsilon}$ on obtient de même :

$$\psi' = \psi + i\vec{\varepsilon}(\vec{L_1} + \vec{L_2} + \ldots + \vec{L_p})\psi = \psi + i\vec{\varepsilon}.\vec{L}\,\psi$$

Ceci explique les relations de commutation de L_z avec les composantes d'un vecteur V, dont la longueur V est invariante par rotation, données au § I2I.

$$\begin{cases} V_x = V \sin\theta \cos\varphi \\ V_y = V \sin\theta \sin\varphi \\ V_z = V \cos\theta \end{cases} \qquad L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$[L_z, V_x]\psi = -i\frac{\partial V_x}{\partial\varphi}\psi = V_y\psi, \text{ etc...}$$

12- Une particule de spin $s = \frac{1}{2}$ est représentée par une fonction d'onde $\psi(\vec{x}, t)$ ayant les caractères d'un spineur: si l'on tient compte de la Relativité c'est un spineur dans l'espace-temps à 4 composantes qui obéit aux équations de Dirac :

$$\left(\sum_\mu \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_0 c\right)\psi = 0$$

Avec les matrices de Von Neuman :

$$\gamma_1 = i\beta\alpha_1 \qquad \gamma_2 = i\beta\alpha_2 \qquad \gamma_3 = i\beta\alpha_3 \qquad \gamma_4 = \beta \quad \text{et :}$$

$$x^1 = x \;,\; x^2 = y \;,\; x^3 = z \;,\; x^4 = ict$$

a) Effectuons d'abord la rotation $-\vec{\varepsilon}$ sur l'espace $\vec{x}$ seul et non sur le spineur ψ dont chaque composante ψ_k est ainsi considérée comme un champ scalaire.

$$\psi'_k(\vec{x'}) = \psi_k(\vec{x})$$

$$\psi'_k(\vec{x}) = \psi_k(\vec{x}) + i\vec{\varepsilon}.\vec{L}\,\psi_k(\vec{x}) \qquad \text{d'après ce qui précède.}$$

...

b) Effectuons maintenant la rotation $-\vec{\varepsilon}$ sur le spineur ψ seul non considéré comme un champ $\psi(\vec{x}) \longrightarrow \Psi(\vec{x})$

On considère plus généralement [23] une rotation infinitésimale dans l'espace-temps représentée par la matrice de transformation $O = 1 + \eta$ (infiniment petite) telle que $\tilde{O}O = 1 \longrightarrow$ $\eta + \tilde{\eta} = 0$ c'est-à-dire $\eta_{ji} = -\eta_{ij}$ (4)

C'est une transformation générale de Lorentz.

On trouve alors que $\Psi = \Lambda \psi$, Λ étant la matrice :

$$\Lambda = 1 - \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu$$

Si nous considérons la rotation $-\vec{\varepsilon}$ dans l'espace ordinaire la transformation générale :

$$x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu = x_\mu + \sum_\nu \eta_{\mu\nu} x_\nu$$

doit se réduire à : $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{\varepsilon} \wedge \vec{x}$

où x_4, x'_4 n'interviennent pas $\longrightarrow$ $\eta_{\mu 4} = \eta_{4\mu} = 0$

Il reste : $\begin{cases} -\eta_{23} = \varepsilon_1 = \varepsilon_x \\ -\eta_{31} = \varepsilon_2 = \varepsilon_y \\ -\eta_{12} = \varepsilon_3 = \varepsilon_z \end{cases}$ complété par (4) qui donne en particulier : $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 0$

$$-\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y & 0 \\ -\varepsilon_z & 0 & \varepsilon_x & 0 \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu = 2 (\varepsilon_1 \gamma_2 \gamma_3 + \varepsilon_2 \gamma_3 \gamma_1 + \varepsilon_3 \gamma_1 \gamma_2)$$

$$\gamma_2 \gamma_3 = -(\beta\alpha_2)(\beta\alpha_3) = \alpha_2 \alpha_3 = i\sigma_1$$
$$\gamma_3 \gamma_1 = -(\beta\alpha_3)(\beta\alpha_1) = \alpha_3 \alpha_1 = i\sigma_2$$
$$\gamma_1 \gamma_2 = -(\beta\alpha_1)(\beta\alpha_2) = \alpha_1 \alpha_2 = i\sigma_3$$

$$\Lambda = 1 + i \vec{\varepsilon} \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad ; \quad \Psi = \psi + i \vec{\varepsilon} \frac{\vec{\sigma}}{2} \psi \qquad (5)$$

...

En fait, il faut effectuer la rotation en même temps sur le spineur et sur le point $\vec{x}$ dont il dépend, d'où :

$$\Psi' = \Psi + i\vec{\varepsilon}\left(\vec{L} + \frac{\vec{\sigma}}{2}\right)\Psi = \Psi + i\vec{\varepsilon}\,\vec{J}.\Psi \qquad (6)$$

Si nous avons p particules de Dirac sans interactions

$$\Psi = \Psi(\vec{x}_1)\,\Psi(\vec{x}_2)\ldots\Psi(\vec{x}_p) \qquad (7)$$

et si nous effectuons la même rotation infinitésimale $-\vec{\varepsilon}$ sur les espaces des p particules : $\Psi'_r = (1 + i\vec{\varepsilon}.\vec{J}_r)\,\Psi(\vec{x}_r)$

$$\Psi' = (1 + i\vec{\varepsilon}\,\vec{J}_1)\ldots(1 + i\vec{\varepsilon}\,\vec{J}_p)\,\Psi = \left[1 + i\vec{\varepsilon}\left(\vec{J}_1 + \ldots + \vec{J}_p\right)\right]\Psi$$

au premier ordre

$$\Psi' = \left(1 + i\vec{\varepsilon}\,\vec{J}\right)\Psi$$

Si les particules interagissent, la fonction d'onde du système $\Psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ peut toujours se développer en somme de produits tels que (7), ce qui ramène au cas précédent.

Le raisonnement précédent précise le langage :

$\vec{L}$ est un opérateur de rotation dans l'espace "ordinaire"

$\vec{\sigma}$ " " " " " "des spins."

et montre que $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ est l'opérateur infinitésimal de rotation dans le cas général.

2 - Nous avons également donné la règle de composition des moments angulaires. Elle se déduit de la théorie des groupes de rotation

Par projection stéréographique de la sphère de rayon 1 sur le plan complexe, on peut remplacer le groupe des rotations autour d'un point (à 3 paramètres) par le groupe "unitaire unimodulaire" [9] ce qui permet d'établir la formule de Clebsch-Gordan.

Une partie d'un système quantique a un moment angulair de projection m sur O_z (m peut prendre toutes valeurs $-j \leq m \leq j$ entières) et peut être représentée par une quelcon que des fonctions propres : $\varphi_j^m(x)$, x ensemble des coordonné d'espace et de spin de cette partie du système.

L'autre partie du moment angulaire j' peut être représentée par une des fonctions : $\varphi_{j'}^{m'}(x')$ de même. Si les 2 parties interagissent nous supposons que j, j' restent de "bons" nombres quantiques (mais non m, m').

...

L'ensemble du système peut être représenté par des fonctions d'onde $\varphi(x,x')$ combinaisons linéaires arbitraires des produits $q_j^m q_{j'}^{m'}$.

Si $j > j'$ on peut séparer $2j'+1$ sous-ensembles de fonctions correspondant aux valeurs :

$J = j+j', j+j'-1, \ldots, j-j'$ ou $J = j+j'-\lambda \quad 0 \leq \lambda \leq 2j'$

du moment angulaire total du système, chaque sous-ensemble contenant 2 J + 1 fonctions correspondant aux différentes valeurs de M. Ceci résulte de la théorie des groupes de rotation, et l'on a donc les fonctions propres :

$$\varphi_J^M = \sum_{m+m'=M} a(J,j,j';m,m')\, q_j^m q_{j'}^{m'}$$

La formule de Clebsch-Gordan donne les valeurs de ces coefficients à un facteur commun $\rho(J,j,j')$ près dépendant des systèmes considérés. de fonctions propres.

$$\varphi_J^M = \rho(J,j,j') \sum_{m+m'=M} c^J_{mm'}\, q_j^m q_{j'}^{m'} \qquad (8)$$

$c^J_{mm'}$ écrit pour $c(J,j,j';m,m')$ ou $c(j,j';\lambda,m,m')$

$$c^J_{mm'} = \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^\nu \frac{\sqrt{(J+M)!\,(J-M)!\,(j+m)!\,(j-m)!\,(j'+m')!\,(j'-m')!}}{\nu!\,(\lambda-\nu)!\,(j-m-\nu)!\,(j+m-\lambda+\nu)!\,(j'+m'-\nu)!\,(j'-m'-\lambda+\nu)!}$$

Les termes de $\sum_\nu$ contenant au dénominateurs des factorielles de nombres négatifs sont pris nuls.

Les $\sum_\nu$ se réduisent à un seul terme pour $\lambda = 0$ ou $J = j+j'$, et $\lambda = 2j'$ ou $J = j-j'$ ($\nu = m'+j' \rightarrow j'-m'-\lambda+\nu \geq 0$, $j'+m'-\nu \geq 0$)

$$c^{j+j'}_{mm'} = \sqrt{\frac{(J+M)!\,(J-M)!}{(j+m)!\,(j-m)!\,(j'+m')!\,(j'-m')!}}$$

$$c^{j-j'}_{mm'} = (-1)^{j'+m'} \sqrt{\frac{(j+m)!\,(j-m)!}{(j'+m')!\,(j'-m')!\,(J+M)!\,(J-M)!}} \qquad (10)$$

...

(9) et (10) sont en accord avec la définition des Y_ℓ^m cas particulier des q_γ^m donnée App.II § 2, comportant un facteur $(-1)^m$ et doivent être modifiées si l'on prend la définition d'autres auteurs que [9].

Les q_γ^m, $q_{\gamma'}^{m'}$ étant supposées orthonormales, ainsi que les $\varphi_J^M(r,r')$ les $c^J_{mm'}$ vérifient des relations générales.

$$\left(\varphi_J^M, \varphi_{J_1}^{M_1}\right) = \begin{cases} = \overline{\rho_J}\,\rho_{J_1} \sum_{\substack{m+m'=M \\ m_1+m_1'=M_1}} c^J_{mm'}\, c^{J_1}_{m_1 m_1'} \left(q_\gamma^m q_{\gamma'}^{m'}, q_\gamma^{m_1} q_{\gamma'}^{m_1'}\right) = \overline{\rho_J}\,\rho_{J_1} \sum_{m+m'=M} c^J_{mm'}\, c^{J_1}_{mm'} \\ = 0 \quad \text{si} \quad M \neq M_1 \end{cases} \qquad \text{si } M = M_1$$

Donc : $\overline{\rho_J}\,\rho_{J_1} \sum_{m+m'=M} c^J_{mm'}\, c^{J_1}_{mm'} = \delta_{JJ_1}$ (11) nécessairement

En particulier : $|\rho_J|^2 \sum_{m+m'=M} \left(c^J_{mm'}\right)^2 = 1$ (12)

Il en résulte que $\sum_{m+m'=M} \left(c^J_{mm'}\right)^2$ est, en fait, indépendant de M; $|\rho_J|$ est alors déterminé par (12).

On peut d'ailleurs résoudre les relations (8) par rapport aux produits $q_\gamma^m\, q_{\gamma'}^{m'}$:

$$\left(q_\gamma^{m_1} q_{\gamma'}^{m_1'}, \varphi_J^M\right) = c^J_{m_1 m_1'}\,\rho_J \quad \text{si } m_1 + m_1' = M \longrightarrow \underline{q_\gamma^m\, q_{\gamma'}^{m'} = \sum_J c^J_{mm'}\, \overline{\rho_J}\, \varphi_J^M} \qquad (13)$$

$$\left(q_\gamma^{m_1} q_{\gamma'}^{m_1'}, \varphi_J^M\right) = 0 \quad \text{si} \quad m_1 + m_1' \neq M$$

Si m + m' = M est fixé, on a bien le même nombre de fonctions φ_J^M ($2j+1$, J variant de $j+j'$ à $j-j'$), et de produits $q_\gamma^m\, q_{\gamma'}^{m'}$ (autant que de valeurs de m' : $2j'+1$).

De (13), on déduit d'autres relations entre les $c^J_{mm'}$

$$\left(q_\gamma^m q_{\gamma'}^{m'}, q_\gamma^{m_1} q_{\gamma'}^{m_1'}\right) = \sum_{J,J_1}' c^J_{mm'}\, c^{J_1}_{m_1 m_1'}\, \overline{\rho_1}\,\rho_{J_1} \left(\varphi_J^M, \varphi_{J_1}^M\right)$$

$$= \sum_J |\rho_J|^2 c^J_{mm'}\, c^J_{m_1 m_1'} = \delta_{mm_1}\delta_{m'm_1'}$$

(14) nécessaire

$\sum_J |\rho_J|^2 \left(c^J_{mm'}\right)^2 = 1$ en particulier.

...

(8) s'applique dans le cas particulier où j est le spin total S d'un système, j' son moment orbital total L, en admettant que L, S soient de bons nombres quantiques, c'est-à-dire que l'on ait couplage R-S.

Alors $m = S_z$ $\quad \varphi_j^m = \chi^{S+1}(\sigma)_{S_z}$ x ensemble coord.de spi

$m' = M_\ell$ $\quad \varphi_{j'}^{m'} = \Phi_L^{M_L}$ x' " " espace

et l'on obtient (1) du § 21.

APPENDICE II

I - Dans le calcul des probabilités de transition interviennent les facteurs radiaux leptoniques : $g_r^2 + f_{-r-2}^2$, $f_r^2 + g_{-r-2}^2$ et $f_r g_r - f_{-r-2} g_{-r-2}$ pris à la surface du noyau

II- Calcul de $g_r^2 + f_{-r-2}^2$

a) Emission β

Nous prenons $e^{-ipR} = 1$ et $F\left(\gamma+1+i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p}, 2\gamma+1; 2ipR\right) = 1$ pour la fonction hypergéométrique confluente, en conservant seulement les Iers termes des développements en puissances de pR

D'après les expressions § II2-b :

$$g_r = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)p}{\pi}}\,(2pR)^{\gamma-1}\, e^{\frac{\pi\alpha Z\varepsilon}{p}}\,\frac{|\Gamma(\gamma_r + i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p})|}{\Gamma(2\gamma_r+1)}\left(\sqrt{(\gamma+1+i\frac{\alpha Z}{p})(\gamma_r+i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p})} + cc\right)$$

$$f_{-r-2} = i\sqrt{\frac{(\varepsilon-1)p}{\pi}} \quad \text{---------id.---------} \quad \left(\sqrt{[i\frac{\alpha Z}{p} - (r+1)](\gamma_r+i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p})} - cc\right)$$

où : $\gamma_r = \sqrt{(j+\frac{1}{2})^2 - \alpha^2 Z^2} = \sqrt{(r+1)^2 - \alpha^2 Z^2}$

Posons : $A = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\,(2pR)^{\gamma-1}\, e^{\frac{\pi\alpha Z\varepsilon}{p}}\,\frac{|\Gamma(\gamma_r+i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p})|}{\Gamma(2\gamma_r+1)}$

$$g_r^2 = A^2(1+\varepsilon)\left\{(\gamma+1+i\frac{\alpha Z}{p})(\gamma_r+i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p}) + cc. + 2\sqrt{[(r+1)^2+\frac{\alpha^2Z^2}{p^2}][\gamma_r^2+\frac{\alpha^2Z^2\varepsilon^2}{p^2}]}\right\}$$

$$= 2A^2(1+\varepsilon)\left\{\gamma_r(r+1) - \frac{\alpha^2Z^2\varepsilon^2}{p^2} + \left[(r+1)^2+\frac{\alpha^2Z^2}{p^2}\right]\right.$$

car : $\gamma_r^2 + \frac{\alpha^2Z^2\varepsilon^2}{p^2} = (r+1)^2 - \alpha^2Z^2 + \frac{\alpha^2Z^2\varepsilon^2}{p^2} = (r+1)^2 + \frac{\alpha^2Z^2}{p^2}$

puisque $\varepsilon^2 - p^2 = 1$

$$g_r^2 = 2A^2(1+\varepsilon)\left[(r+1)(\gamma_r+r+1) + \frac{\alpha^2Z^2}{p^2}(1-\varepsilon)\right]$$

De même :

$$f_{-r-2}^2 = A^2(1-\varepsilon)\left\{[i\frac{\alpha Z}{p} - (r+1)][(\gamma_r+i\frac{\alpha Z\varepsilon}{p}) + cc. - 2\sqrt{[(r+1)^2+\frac{\alpha^2Z^2}{p^2}][\gamma_r^2+\frac{\alpha^2Z^2\varepsilon^2}{p^2}]}\right\}$$

$$= 2A^2(\varepsilon-1)\left[(r+1)(\gamma_r+r+1) + \frac{\alpha^2Z^2}{p^2}(1+\varepsilon)\right]$$

...

$$g_r^2 + f_{-r-2}^2 = 4A^2(r+1)(\gamma_r+r+1)\varepsilon$$

$$g_r^2 + f_{-r-2}^2 = \frac{4}{\pi}(r+1)(\gamma_r+r+1)\,\varepsilon p\,(2pR)^{2\gamma_r-2}\,e^{\frac{\pi\alpha 2\varepsilon}{p}}\left|\frac{\Gamma\left(\gamma_r+i\frac{\alpha 2\varepsilon}{p}\right)}{\Gamma(2\gamma_r+1)}\right|^2 \qquad (1)$$

Quand $Z \to 0$, $\gamma_r \to r+1$ et $\Gamma(2\gamma_r+1) \longrightarrow (2r+2)!$

$$\Gamma\left(\gamma_r+i\frac{\alpha 2\varepsilon}{p}\right) \to r!$$

ce qui conduit à poser :

$$F_r = \left[\frac{(2r+2)!}{r!}\right]^2 (2pR)^{2\gamma_r-2r-2}\,e^{\frac{\pi\alpha 2\varepsilon}{p}}\left|\frac{\Gamma\left(\gamma_r+i\frac{\alpha 2\varepsilon}{p}\right)}{\Gamma(2\gamma_r+1)}\right|^2 \qquad (2)$$

où $F_r \to 1$ quand $Z \to 0$; pour $r = 0$ on a la fonction de Fermi F_0

d'où :

$$g_r^2 + f_{-r-2}^2 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\gamma_r+r+1}{2r+2}\left[\frac{r!}{(2r+1)!}\right]^2 \cdot F_r\,(2pR)^{2r}\,\varepsilon p \qquad (3)$$

$\frac{\gamma_r+r+1}{2r+2} \to 1$ quand Z $\longrightarrow$ 0 et certains auteurs font entrer ce facteur dans F_r

b) <u>Capture électronique</u> :

Nous posons ici : $F\left(-n', 2\gamma+1, \frac{2\alpha ZR}{N}\right) = 1$, $e^{-\frac{\alpha 2R}{N}} = 1$

$\left(\frac{\alpha 2R}{N} = \frac{R}{a} \leqslant \frac{1}{100}\right)$

d'où, d'après les expressions § II2-b, avec

$K = -\left(j_1+\frac{1}{2}\right) = -(r+1)$ si $j_1 = \ell_1+\frac{1}{2}$

$K = j_1+\frac{1}{2} = r+1$ $\qquad j_1 = \ell_1-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} g_r = -\dfrac{\sqrt{\Gamma(2\gamma_r+n'+1)}}{\Gamma(2\gamma_r+1)\sqrt{n'!}}\left(\dfrac{2\alpha 2}{N}\right)^{3/2}\left(\dfrac{2\alpha 2R}{N}\right)^{\gamma-1}\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{4N(N+r+1)}}\,(N+r+1-n') \\ f_{-r-2} = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{4N(N-r-1)}}\,(N-r-1+n') \end{cases}$$

$$g_r^2 + f_{-r-2}^2 = B^2\left[\frac{(N+r+1-n')^2}{N+r+1}(1+\varepsilon) + \frac{(N-r-1+n')^2}{N-r-1}(1-\varepsilon)\right]$$

où :

$$B^2 = \frac{\Gamma(2\gamma_r+n'+1)}{[\Gamma(2\gamma_r+1)]^2 n'!}\,\frac{1}{4N}\left(\frac{2\alpha 2}{N}\right)^3\left(\frac{2\alpha 2R}{N}\right)^{2\gamma-2}$$

...

Posons aussi $r + 1 = r'$

$$g_r^2 + f_{-r-2}^2 = B^2 \left[\frac{(N+r'-n')^2(N-r') + (N-r'+n')^2(N+r')}{N^2 - r'^2} \right.$$
$$\left. + \varepsilon \frac{(N+r'-n')^2(N-r') - (N-r'+n')^2(N+r')}{N^2 - r'^2} \right]$$

$$g_r^2 + f_{-r-2}^2 = 2B^2 \left[N \frac{N^2 - r'^2 + n'^2}{N^2 - r'^2} + \varepsilon \frac{(r'-n')(N^2 - r'^2) - n'^2 r'^2}{N^2 - r'^2} \right] \qquad (4)$$

$$N^2 = (n' + \gamma_r)^2 + \alpha^2 Z^2 = n'^2 + r'^2 + 2n'\gamma_r$$

$$N^2 - r'^2 = n'(n' + 2\gamma_r) \qquad N^2 - r'^2 + n'^2 = 2n'(n' + \gamma_r)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{N^2}} = \frac{n' + \gamma_r}{N}$$

$$g_r^2 + f_{-r-2}^2 = 2B^2 \left[N \frac{2(n'+\gamma_r)}{n'+2\gamma_r} + \frac{n'+\gamma_r}{N} \frac{(r'-n')(n'+2\gamma_r) - n'r'^2}{n'+2\gamma_r} \right]$$

$$= \frac{2B^2}{n'+2\gamma_r} \cdot \frac{n'+\gamma_r}{N} \left[2N^2 + (r'-n')(n'+2\gamma_r) - n'r'^2 \right]$$

$$= \frac{2B^2}{n'+2\gamma_r} \cdot \frac{n'+\gamma_r}{N} \left[(r'+n')(n'+2\gamma_r) + (2-n')r'^2 \right]$$

puisque : $N^2 = r'^2 + n'(n' + 2\gamma_r)$

$$g_r^2 + f_{-r-2}^2 = \frac{\Gamma(2\gamma_r + n')}{[\Gamma(2\gamma_r + 1)]^2 n'!} \frac{1}{2N^2} \left(\frac{2\alpha Z}{N} \right)^3 \left(\frac{2\alpha 2R}{N} \right)^{2\gamma_r - 2} (n' + \gamma_r) \left[(r'+n')(n'+2\gamma_r) + (2-n')r'^2 \right] \qquad (5)$$

Z dépend en réalité <u>de n'</u> : il faut tenir compte de l'effet d'écran des électrons des couches plus profondes.

On peut prendre, par exemple, les nombres d'écran de Slater [59] ; dans une couche n (= n' + ℓ + 1), les nombres d'écran z se calculent différemment pour les électrons s et p

...

$(\ell = 0, 1)$; d $(\ell = 2)$ et f $(\ell = 3)$

Pour les électrons s, p , chaque électron de la couche n-1 apporte un nombre d'écran 0,85 et ceux des couches $n-2, n-3, \ldots$ un nombre d'écran 1,00. Pour les électrons d ou f, chaque électron des couches n-1, n-2,... apporte un nombre d'écran 1,00.

Dans une même couche chaque autre électron apporte le nombre d'écran 0,35 (sauf pour les électrons 1 s : 0,30)

Pour r fixé, n' joue le rôle que jouait ε pour les spectres continus. Mais d'après (5), $g_r^2 + f_{r-2}^2$ décroît quand n' croît $N \# n' + \gamma_r$ croît aussi et l'on voit que $g_r^2 + f_{r-2}^2$ varie en gros comme $\frac{1}{N^3}$. La décroissance est assez rapide pour les faibles valeurs de $\gamma_r \# l+1$. L'effet de la variation de z peut être plus important pour les éléments légers,-

Quand r _____ r+1, on passe un ordre au svt. Outre l'effet sur N (n' étant fixé) (5) est multiplié par $\left(\frac{2\alpha Z R}{N}\right)^2$ sensiblement.

I2- Calcul de $f_r^2 + g_{r-2}^2$:

a) Emission β

$$\begin{cases} f_r = i\sqrt{\varepsilon - 1}\; A\left(\sqrt{\left(r+1+i\frac{\alpha Z}{p}\right)\left(\gamma_r + i\frac{\alpha Z \varepsilon}{p}\right)} - cc\right) \\ g_{r-2} = \sqrt{\varepsilon + 1}\; A\left(\sqrt{\left[i\frac{\alpha Z}{p} - (r+1)\right]\left[\gamma_r + i\frac{\alpha Z \varepsilon}{p}\right]} + cc\right) \end{cases}$$

$$f_r^2 = A^2(1-\varepsilon)\left\{\left(r+1+i\frac{\alpha Z}{p}\right)\left(\gamma_r + i\frac{\alpha Z \varepsilon}{p}\right) + cc - 2\sqrt{\left[(r+1)^2 + \frac{\alpha^2 Z^2}{p^2}\right]\left(\gamma_r^2 + \frac{\alpha^2 Z^2 \varepsilon^2}{p^2}\right)}\right\}$$

$$= 2A^2(1-\varepsilon)\left[(r+1)(\gamma_r - r - 1) - \frac{\alpha^2 Z^2}{p^2}(1+\varepsilon)\right]$$

$$g_{r-2}^2 = A^2(1+\varepsilon)\left\{\left[i\frac{\alpha Z}{p} - (r+1)\right]\left(\gamma_r + i\frac{\alpha Z \varepsilon}{p}\right) + cc + 2\sqrt{\left[(r+1)^2 + \frac{\alpha^2 Z^2}{p^2}\right]\left(\gamma_r^2 + \frac{\alpha^2 Z^2 \varepsilon^2}{p^2}\right)}\right\}$$

$$g_{r-2}^2 = 2A^2(1+\varepsilon)\left[(r+1)(r+1-\gamma_r) + \frac{\alpha^2 Z^2}{p^2}(1-\varepsilon)\right]$$

$$f_r^2 + g_{r-2}^2 = 4A^2(1+r)(r+1-\gamma_r)\varepsilon$$

...

$$f_r^2 + g_{-r-2}^2 = \frac{4}{\pi}(r+1)(r+1-\gamma_r)\,\varepsilon p\,(2pR)^{2\gamma_r-2}\,e^{\frac{\pi\alpha 2\varepsilon}{p}}\left|\frac{\Gamma(\gamma_r + i\frac{\alpha 2\varepsilon}{p})}{\Gamma(2\gamma_r+1)}\right|^2 \quad (6)$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{r+1-\gamma_r}{2r+2}\left[\frac{r!}{(2r+1)!}\right]^2 F_r\,(2pR)^{2r}\,\varepsilon p \quad (7)$$

Pour une même valeur de j_1 (ou de r) $g_r^2 + f_{-r-2}^2$ et $f_r^2 + g_{-r-2}^2$ sont des fonctions de ε qui ne diffèrent que par un facteur constant :

$$r + 1 + \gamma_r = r+1+\sqrt{(r+1)^2 - \alpha^2 Z^2} \;\#\; 2r+2 - \frac{\alpha^2 Z^2}{2r+2}$$

$$r + 1 - \gamma_r = r+1-\sqrt{(r+1)^2 - \alpha^2 Z^2} \;\#\; \frac{\alpha^2 Z^2}{2r+2}$$

de sorte que :

$$f_r^2 + g_{-r-2}^2 \;\#\; \left(\frac{\alpha Z}{2r+2}\right)^2 (g_r^2 + f_{-r-2}^2)$$

b) Capture électronique :

$$\begin{cases} f_r = -\dfrac{\sqrt{\Gamma(2\gamma_r+n'+1)}}{\Gamma(2\gamma_r+1)\sqrt{n'!}}\left(\dfrac{2\alpha Z}{N}\right)^{3/2}\left(\dfrac{2\alpha Z R}{N}\right)^{r-1}\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{4N(N+r+1)}}\,(N+r+1+n') \\ g_{-r-2} = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{4N(N-r-1)}}\,(N-r-1-n') \end{cases}$$

$$f_r^2 + g_{-r-2}^2 = B^2\left[\frac{(N+r'+n')^2}{N+r'}(1-\varepsilon) + \frac{(N-r'-n')^2}{N-r'}(1+\varepsilon)\right]$$

se déduit de l'expression de $g_r^2 + f_{-r-2}^2$ en changeant n' en -n', ε en $-\varepsilon$ d'où d'après (4) :

$$f_r^2 + g_{-r-2}^2 = 2B^2\left[N\,\frac{N^2 - r'^2 + n'^2}{N^2 - r'^2} - \varepsilon\,\frac{(r'+n')(N^2-r'^2) - n'^2 r'^2}{N^2 - r'^2}\right]$$

$$= 2B^2\left[N\,\frac{2(n'+\gamma_r)}{n'+2\gamma_r} - \frac{n'+\gamma_r}{N}\,\frac{(r'+n')(n'+2\gamma_r) - n'r'^2}{n'+2\gamma_r}\right]$$

$$= \frac{2B^2}{n'+2\gamma_r}\,\frac{n'+\gamma_r}{N}\left[2N^2 - (r'+n')(n'+2\gamma_r + n'r'^2\right]$$

...

$$f_r^2 + g_{r-2}^2 = \frac{2B^2}{n'+2\gamma_r}\,\frac{n'+\gamma_r}{N}\left[(n'-r')(n'+2\gamma_r)+(2+n')r'^2\right]$$

$$f_r^2 + g_{r-2}^2 = \frac{\Gamma(2\gamma_r+n'+1)}{\left[\Gamma(2\gamma_r+1)\right]^2 n'!}\,\frac{1}{2N^2}\left(\frac{2\alpha 2}{N}\right)^{n'}\left(\frac{2\alpha 2R}{N}\right)^{2\gamma-2}\frac{n'+\gamma_r}{n'+2\gamma_r}\left[(n'-r')(n'+2\gamma_r)+(2+n')r\right.$$

$$(8)\qquad = \frac{\Gamma(2\gamma_r+n')}{\left[\Gamma(2\gamma_r+1)\right]^2 n'!}\,\frac{1}{2N^2}\left(\frac{2\alpha 2}{N}\right)^{n'}\left(\frac{2\alpha 2R}{N}\right)^{2r-2}(n'+\gamma_r)\left[(n'-r-1)(n'+2\gamma_r)+(2+n')(r+1)\right.$$

---

où Z dépend de n' comme précédemment :

Ici : $\dfrac{f_r^2+g_{-r-2}^2}{g_r^2+f_{-r-2}^2} = \dfrac{(n'-r')(n'+2\gamma_r)+(2+n')r'^2}{(n'+r')(n'+2\gamma_r)+(2+n')r'^2}$

dépend de n'

Pour n'=0, nous retrouvons le rapport : $\dfrac{n'-\gamma_r}{r'+\gamma_r} = \dfrac{r'-r'+\frac{\alpha^2 2^2}{2r'}}{r'+r'-\frac{\alpha^2 2^2}{2r'}}$

$$\frac{f_r^2+g_{-r-2}^2}{g_r^2+f_{-r-2}^2} \neq \left(\frac{\alpha 2}{2r+2}\right)^2$$

Pour n' $\gg$ r' au contraire :

$$f_r^2 + g_{-r-2}^2 \approx g_r^2 + f_{-r-2}^2$$

I3- Calcul de $f_r\,g_r - f_{-r-2}\,g_{-r-2}$:

a) Emission β

$$f_r g_r = i\sqrt{\varepsilon'-1}\;A^2\left[\sqrt{(r+1+i\frac{\alpha 2}{p})(\gamma_r+i\frac{\alpha 2\varepsilon}{p})}+cc\right]\left[\sqrt{(r+1+i\frac{\alpha 2}{p})(\gamma_r+i\frac{\alpha 2\varepsilon}{p})}-cc\right]$$

$$= i\sqrt{\varepsilon^2-1}\;A^2\left[(r+1+i\frac{\alpha 2}{p})(\gamma_r+i\frac{\alpha 2\varepsilon}{p})-cc\right]$$

$$= -2p\,A^2\left[\gamma_r\frac{\alpha 2}{p}+(r+1)\frac{\alpha 2\varepsilon}{p}\right]$$

$$f_{-r-2}\,g_{r-2} = i\sqrt{\varepsilon^2-1}\;A^2\left\{\sqrt{\left[i\frac{\alpha 2}{p}-(r+1)\right](\gamma_r+i\frac{\alpha 2\varepsilon}{p})}-cc\right\}\left\{\sqrt{\left[i\frac{\alpha 2}{p}-(r+1)\right](\gamma_r+i\frac{\alpha 2\varepsilon}{p})}\right.$$

$$= i\,A^2 p\left\{\left[i\frac{\alpha 2}{p}-(r+1)\right]\left[\gamma_r+i\frac{\alpha 2\varepsilon}{p}\right]-cc\right\}$$

$$= -2p\,A^2\left[\gamma_r\frac{\alpha 2}{p}-(r+1)\frac{\alpha 2\varepsilon}{p}\right]$$

...

$$f_r g_r - f_{-r-2} g_{-r-2} = -4A^2(r+1)\alpha 2\varepsilon$$

$$f_{-r-2} g_{-r-2} - f_r g_r = \frac{4}{\pi}(r+1)\alpha 2\,\varepsilon p\,(2pR)^{2\gamma_r-2}\, e^{\frac{\pi\alpha 2\varepsilon}{p}} \left| \frac{\Gamma\left(\gamma_r + i\frac{\alpha 2\varepsilon}{p}\right)}{\Gamma(2\gamma_r+1)} \right|^2$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\alpha 2}{2r+2}\left[\frac{r!}{(2r+1)!}\right]^2 F_r\,(2pR)^{2r}\,\varepsilon p \qquad (9)$$

b) Capture électronique :

$$\begin{cases} f_r g_r = B^2 \dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{N+r'}(N+r'-n')(N+r'+n') \\ f_{-r-2} g_{-r-2} = B^2 \dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{N-r'}(N-r'+n')(N-r'-n') \end{cases}$$

$$f_{-r-2} g_{-r-2} - f_r g_r = B^2 \frac{\alpha 2}{N}\cdot\frac{\left[(N+r')^2 - n'^2\right](N-r') - (N+r')\left[(N-r')^2 - n'^2\right]}{N^2 - r'^2}$$

$$= B^2 \frac{\alpha 2}{N}\cdot 2r'\,\frac{N^2 - r'^2 + n'^2}{N^2 - r'^2} = 4B^2\frac{\alpha 2}{N}\,r'\,\frac{n'+\gamma_r}{n'+2\gamma_r}$$

$$f_{-r-2} g_{-r-2} - f_r g_r = \frac{\Gamma(2\gamma_r+n')}{\left[\Gamma(2\gamma_r+1)\right]^2 n'!}\,\frac{8}{N}\left(\frac{\alpha 2}{N}\right)^4\left(\frac{2\alpha 2R}{N}\right)^{2\gamma_r-2}(r+1)(n'+\gamma_r) \qquad (10)$$

Pour l'émission β : $f_{-r-2} g_{-r-2} - f_r g_r \# \left(\frac{\alpha 2}{2r+2}\right)^2 (g_r^2 + f_{-r-2}^2)$

pour la capture, le rapport est : $\dfrac{2r'\alpha 2}{(r'+n')(n'+2\gamma_r)+(2-n')r'^2}$

qui ne se réduit au précédent que pour n' = 0

2- Dans le calcul de la partie angulaire, nous avons besoin des coefficients $\alpha(r,s)$; $\beta(r,s)$; $\gamma(r,s)$

définis par :

$$\begin{cases} Y_r^{-r}\, Y_s^{-s} = \alpha(r,s)\, Y_n^{-n} & (n = r+s) \\ Y_{r+1}^{-r}\, Y_s^{-s} = \beta(r,s)\, Y_n^{-(n-1)} & (n = r+s+1) \\ Y_{r+1}^{-r}\, Y_{s+1}^{-s} = \gamma(r,s)\, Y_{r+s+2}^{-(r+s)} & \end{cases}$$

...

les Y_ℓ^m étant donnés par :

$$Y_\ell^m = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2^\ell \ell!}(1-u^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{\ell+m}}{du^{\ell+m}}(u^2-1)^\ell \qquad (+)$$

$$Y_r^{-r} = (-1)^r \sqrt{\frac{2r+1}{2}(2r)!}\,\frac{e^{-ir\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{2^r r!}(1-u^2)^{-\frac{r}{2}}(u^2-1)^r$$

$$Y_s^{-s} = (-1)^s \sqrt{\frac{2s+1}{2}(2s)!}\,\frac{e^{-is\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{2^s s!}(1-u^2)^{-\frac{s}{2}}(u^2-1)^s$$

$$Y_r^{-r}\,Y_s^{-s} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{(2r+1)(2s+1)(2r)!(2s)!}{2}}\,\frac{1}{2^n r!s!}\,\frac{e^{-im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}(1-u^2)^{-\frac{n}{2}}(u^2-1)^n$$

où $n = r+s$. En comparant avec :

$$Y_n^{-n} = (-1)^n \sqrt{\frac{2n+1}{2}(2n)!}\,\frac{e^{-im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{2^n r!}(1-u^2)^{-\frac{n}{2}}(u^2-1)^n$$

$$Y_r^{\,r}\,Y_s^{-s} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{(2r+1)!(2s+1)!}{(2n+1)!}}\,\frac{n!}{r!s!}\,Y_n^{-n} \qquad (11)$$

$$Y_{r+1}^{-r-1} = (-1)^r \sqrt{\frac{2r+3}{2}(2r+1)!}\,\frac{e^{-ir\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{2^{r+1}(r+1)!}(1-u^2)^{-\frac{r}{2}}(r+1)(u^2-1)^r\cdot 2u$$

$$Y_{r+1}^{-r}\,Y_{s+1}^{-s} = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{(2r+3)(2r+1)!(2s+1)!}{2}}\,\frac{e^{-i(n-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{2^n 1!(r+1)!}(1-u^2)^{-\frac{n-1}{2}}(r+1)\times$$

$$\times\, 2u\,(u^2-1)^{n-1}$$

où $r+1 = n-1$. En comparant avec :

$$Y_n^{-(n-1)} = (-1)^{n-1}\sqrt{\frac{2n+1}{2}(2n-1)!}\,\frac{e^{-i(n-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{2^n n!}(1-u^2)^{-\frac{n-1}{2}}\frac{d}{du}(u^2-1)^n \times n(u^2-1)^{n-1}\cdot 2u$$

$$Y_{r+1}^{-r}\,Y_s^{-s} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{(2r+3)(2r+1)!(2s+1)!}{(2r+2s+3)(2r+2s+1)!}}\,\frac{(r+s)!}{r!s!}\,Y_n^{-(n-1)} \qquad (12)$$

$$Y_{s+1}^{-s-1} = (-1)^s \sqrt{\frac{2s+3}{2}(2s+1)!}\,\frac{e^{-is\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{2^{s+1}(s+1)!}(1-u^2)^{-\frac{s}{2}}(s+1)(u^2-1)^s\cdot 2u$$

(+) Le facteur $(-1)^m$ conforme aux définitions de E. Bauer [9] et F. Perrin ne figure pas chez d'autres auteurs (Rosenfeld, Bethe).

$$Y_{r+1}^{-r}\, Y_{s+1}^{-s} = (-1)^{r+s}\sqrt{\frac{(2r+3)(2s+3)(2r+1)!(2s+1)!}{4}}\,\frac{e^{-i(r+s)\varphi}}{2\pi}\,(1-u^2)^{-\frac{r+s}{2}}\,\frac{1}{2^{r+s+2}\,r!\,s!}\times$$

$$\times\,(u^2-1)^{r+s}\cdot 4u^2$$

$4u^2(u^2-1)^{r+s}$ peut s'exprimer en fonction de :

$$\frac{d^2}{du^2}(u^2-1)^{r+s+2} \longrightarrow Y_{r+s+2}^{-(r+s)} \quad \text{et} \quad (u^2-1)^{r+s} \longrightarrow Y_{r+s}^{-(r+s)}$$

$$\frac{d^2}{du^2}(u^2-1)^{r+s+2} = \frac{d}{du}\left[(r+s+2)(u^2-1)^{r+s+1}\times 2u\right] = (u^2-1)^{r+s}\left[2(r+s+2)(2r+2s+3)u^2 - 2(r+s\right.$$

$$2u^2(u^2-1)^{r+s} = \frac{1}{2r+2s+3}\left[2(u^2-1)^{r+s} + \frac{1}{r+s+2}\frac{d^2}{du^2}(u^2-1)^{r+s+2}\right]$$

En portant dans l'expression précédente, et en comparant avec :

$$Y_{r+s+2}^{-(r+s)} = (-1)^{r+s}\sqrt{\frac{2r+2s+5}{2}\,\frac{(2r+2s+2)!}{2!}}\,\frac{e^{-i(r+s)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{2^{r+s+2}(r+s+2)!}\,(1-u^2)^{-\frac{r+s}{2}}\times \cdots$$

$$\times\,\frac{d^2}{du^2}(u^2-1)^{r+s+2}$$

$$(13)\quad Y_{r+1}^{-r}\, Y_{s+1}^{-s} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(r+s+1)!}{r!\,s!}\,\frac{1}{2r+2s+3}\sqrt{\frac{(2r+3)(2s+3)}{2r+2s+5}\,\frac{(2r+1)!(2s+1)!}{(2r+2s+2)!}}\;Y_{r+s+2}^{-(r+s)} + \cdots$$

Comme :

$$\alpha(r+1,s+1) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\frac{(r+s+2)!}{(r+1)!(s+1)!}\sqrt{\frac{(2r+3)!(2s+3)!}{(2r+2s+5)!}}$$

$$\gamma(r,s) = \alpha(r+1,s+1)\sqrt{\frac{(2r+2)(2s+2)}{(r+s+2)(2r+2s+3)}}$$

3- Nous avons utilisé le théorème (M) : $\sum_{M'} P(J,M \to J',M')$ est indépendant de M. M' correspondant à l'"orientation" du noyau final, et $\sum_{M'}$ est une somme sur toutes les orientations possibles du noyau final. Il est intuitif qu'elle ne dépend pas de M, c'est-à-dire de l'orientation du noyau initial , l'espace étant isotrope en l'absence de champ dirigé extérieur au système.

En réalité , le momentangulaire n'est pas un vecteur classique; au cours d'une rotation $\varphi_J^M \longrightarrow \sum_{M_1} a_{MM_1}\varphi_J^{M_1}$ M donne toutes les valeurs M_1 en général. Pour OBVIER à cette difficulté, de Groot et Tolhock [6] introduisent un ensemble de

...

Gibbs invariant par rotation et démontrent que la densité d'occupation des différents états M est indépendante de M. Au cours de la transition J,M $\longrightarrow$ J' M' produite par un Hamiltonien, invariant par rotation, un tel ensemble reste invariant par rotation, ce qui ramène à l'argument précédent.

APPENDICE III

LES ELEMENTS DE MATRICE NUCLEAIRES .-

La partie angulaire fonction de J, L et J' L' peut être calculée dans certains cas simples.

Le plus simple est celui où l'on peut considérer qu'un seul nucléon intervient dans la transition (cas des noyaux miroirs N = Z ± 1)

On peut alors à l'aide de (1) du § 2I, qui se réduit ici à (1)', calculer $\int Y_n \beta \vec{\sigma}$ et $\int Y_{n-1} \beta \vec{\sigma} \wedge \vec{r}$

Pour les transitions permises $\int \beta \vec{\sigma} = -\int \vec{\sigma}$ à cette approximation non Relativiste, a des valeurs bien connues (N.F.II. p.366-389).

Nous considérerons ici le nucléon comme une particule de Dirac dans un potentiel central moyen, ce qui nous permettra de calculer aussi $\int Y_{n-1} i\beta\vec{\alpha}$ etc...

I°- Calcul de $m_n = \int Y_n \beta \vec{\sigma}$ et $m'_n = \int Y_{n-1} [\beta\sigma, \vec{r}]$

Ils proviennent de : $\overline{\Psi} \beta \sigma_- \Psi = \sqrt{2}\left(\overline{F_2}\Phi_1 - \overline{F_4}\Phi_3\right)$

(§ 22I) $\overline{\Psi} \beta \sigma_3 \Psi$

1) m_n correspond à $\Delta L = n$, $\Delta J = n+1$ $\quad \updownarrow \rightleftarrows \updownarrow \quad a \to b$ ou $b \to a$

Nous prenons M = J → M' = J' (Seul $\overline{\Psi} \beta \sigma_- \Psi$ intervient).

$$\sqrt{2}\left(\overline{F_2}\Phi_1 - \overline{F_4}\Phi_3\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{2J'+1}{2J+2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y^{J+\frac{1}{2}}_{J'+\frac{1}{2}}}\; Y^{J-\frac{1}{2}}_{J-\frac{1}{2}} \left(f_{L'} f_{-L-1} \text{ ou } g_{-L'} g_L\right)$$

$$\# \sqrt{2}\sqrt{\frac{2J'+1}{2J+2}}\; \overline{Y^{J+\frac{1}{2}}_{J'+\frac{1}{2}}}\; Y^{J-\frac{1}{2}}_{J-\frac{1}{2}}\; g_{-L'-1} g_L$$

en négligeant $\frac{v^2}{c^2}$ devant 1 $\left(\frac{f}{g} \approx \frac{1}{2}\frac{v}{c}\right)$

Remarquons que $\overline{\Psi} \sigma_- \Psi = \sqrt{2}\left(\overline{F_2}\Phi_1 + \overline{F_4}\Phi_3\right)$ d'où, dans le même cas :

$$\sqrt{2}\left(\overline{F_2}\Phi_1 + \overline{F_4}\Phi_3\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{2J'+1}{2J+2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y^{J+\frac{1}{2}}_{J'+\frac{1}{2}}}\; Y^{J-\frac{1}{2}}_{J-\frac{1}{2}} \left(f_{L'} f_{-L-1} \text{ ou } g_{-L'} g_L\right)$$

...

$$\sqrt{2}\left(\overline{\mathcal{F}_2}\,\Phi_1 + \overline{\mathcal{F}_4}\,\Phi_3\right) \# -\sqrt{2}\sqrt{\frac{2J+1}{2J+2}}\;\overline{Y^{J+\frac12}_{J+\frac12}}\;Y^{J-\frac12}_{J-\frac12}\;g_{-L'}\,g_L$$

On a bien : $\int \beta\vec{\sigma}\,Y_n = -\int \vec{\sigma}\,Y_n$ à l'approximation non Relativiste.

$$\mathcal{M}_n = \sqrt{4\pi}\int Y^{-n}_n\;\overline{\mathcal{F}^{J'}_{J'}}\;\beta\sigma_-\;\mathcal{F}^{J}_{J} = (-1)^n\sqrt{8\pi}\sqrt{\frac{2J+1}{2J'+2}}\left(Y^{J'+\frac12}_{J+\frac12}\,Y^{n}_{n},\,Y^{J-\frac12}_{J-\frac12}\right)\int g_{-L'}\,g_L$$

$$= (-1)^n\sqrt{8\pi}\sqrt{\frac{2J+1}{2J'+2}}\;\alpha\left(J+\tfrac12,n\right)\int g_{-L'}\,g_L\,r^2\,dr$$

$$\alpha\left(J+\tfrac12,n\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{(2J+2)!\,(2n+1)!}{(2J'+2n+2)!}}\;\frac{\left(J+n+\frac12\right)!}{\left(J+\frac12\right)!\,n!} \qquad (11\ \text{App II})$$

$$\mathcal{M}_n = (-1)^n\sqrt{2}\sqrt{(2J+1)\,\frac{(2J+1)!\,(2n+1)!}{(2J'+2n+2)!}}\;\frac{\left(J+n+\frac12\right)!}{\left(J+\frac12\right)!\,n!}\int g_{-L'}\,g_L\,r^2\,dr$$

Nous sommes dans le cas : $J = L+\frac12 \longrightarrow J' = L'-\frac12 \qquad L-L' = n$

d'où la partie angulaire de $\mathcal{M}_n$:

$$(-1)^n\sqrt{2}\sqrt{2L'\,\frac{(2L')!\,(2n+1)!}{(2L'+2n+1)!}}\;\frac{(L'+n)!}{L'!\,n!} = (-1)^n\sqrt{4L'\,\frac{(2L')!\,(2n+1)!}{(2L+1)!}}\;\frac{L!}{L'!\,n!}$$

$$\left|\mathcal{M}_n\right|^2 = \left|\int \beta\vec{\sigma}\,Y_n\right|^2 = 4L'\,\frac{(2L')!\,(2n+1)!}{(2L+1)!}\left(\frac{L!}{L'!\,n!}\right)^2\left|\mathcal{M}_{n\rho}\right|^2 \qquad (1)$$

$\mathcal{M}_{n\rho}$ partie radiale.

Pour n = 0, L = L', en particulier :

(2) $\left|\mathcal{M}_n\right|^2 = \frac{4L}{2L+1}\left|\mathcal{M}_{n\rho}\right|^2$ est bien la valeur classique.

Dans Rosenfeld (loc.cit.) on a $\frac13\,\frac{4L}{2L+1}$, cet auteur prenant l'opérateur $\frac{\vec{\sigma}}{\sqrt{3}} = \Omega$ tel que $\Omega^2 = 1$

...

b) $\mathcal{M}''_n$ et $\mathcal{L}''_n$ correspondent à $\Delta L = n$, $\Delta J = n$ $\begin{matrix} b \\ \updownarrow \\ b \end{matrix} \rightleftarrows \begin{matrix} a \\ \updownarrow \\ b \end{matrix}$ $a \to a$ ou $b \to b$

$$\overline{\mathcal{F}}\,\beta\sigma\,\Phi = \sqrt{2}\,(\overline{\mathcal{F}}_2\,\Phi_1 - \overline{\mathcal{F}}_4\,\Phi_3)$$

$$\overline{\mathcal{F}}\,\beta\sigma_3\,\Phi = \overline{\mathcal{F}}_1\,\Phi_1 - \overline{\mathcal{F}}_2\,\Phi_2 - \overline{\mathcal{F}}_3\,\Phi_3 + \overline{\mathcal{F}}_4\,\Phi_4$$

Nous prenons toujours : M = J $\to$ M'=J'

$$\sqrt{2}\,(\overline{\mathcal{F}}_2\,\Phi_1 - \overline{\mathcal{F}}_4\,\Phi_3) = -\sqrt{2}\left(\frac{2J'+1}{2J'+2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2J+2}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{Y^{J'+\frac{1}{2}}_{J'+\frac{1}{2}}}\;Y^{J-\frac{1}{2}}_{J+\frac{1}{2}}\,(f_{L'}f_L \text{ ou } -g_{-L'-1}g_{-L-1})$$

$$\#\;\sqrt{2}\sqrt{\frac{2J'+1}{2J'+2}}\,\frac{1}{\sqrt{2J+2}}\;\overline{Y^{J'+\frac{1}{2}}_{J'+\frac{1}{2}}}\;Y^{J-\frac{1}{2}}_{J+\frac{1}{2}}\;g_{-L'-1}g_{-L-1}$$

$(b \to b)$

$\overline{\mathcal{F}}\,\sigma_-\,\Phi$ conduit toujours au résultat opposé.

$$\overline{\mathcal{F}}_1\,\Phi_1 - \overline{\mathcal{F}}_2\,\Phi_2 - \overline{\mathcal{F}}_3\,\Phi_3 + \overline{\mathcal{F}}_4\,\Phi_4 = \begin{cases} \left(\frac{1}{2J'+2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2J+2}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{Y^{J'-\frac{1}{2}}_{J'+\frac{1}{2}}}\;Y^{J-\frac{1}{2}}_{J+\frac{1}{2}}\,(f_{L'}f_L \text{ ou } -g_{-L'-1}g_{L-1} \\ -\left(\frac{2J'+1}{2J'+2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2J+1}{2J+2}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{Y^{J'+\frac{1}{2}}_{J'+\frac{1}{2}}}\;Y^{J+\frac{1}{2}}_{J+\frac{1}{2}}\,(f_{L'}f_L \text{ ou } \text{——} \\ -\overline{Y^{J'-\frac{1}{2}}_{J'-\frac{1}{2}}}\;Y^{J-\frac{1}{2}}_{J-\frac{1}{2}}\,(g_{L'}g_L \text{ ou } -f_{-L'-1}f_{-L-1}) \end{cases}$$

$$\#\begin{cases} \left[\sqrt{\frac{(2J'+1)(2J+1)}{(2J'+2)(2J+2)}}\;\overline{Y^{J'+\frac{1}{2}}_{J'+\frac{1}{2}}}\;Y^{J+\frac{1}{2}}_{J+\frac{1}{2}} - \frac{\overline{Y^{J'-\frac{1}{2}}_{J'+\frac{1}{2}}}\;Y^{J-\frac{1}{2}}_{J+\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2J'+2)(2J+2)}}\right]g_{-L'-1} \\ -\overline{Y^{J'+\frac{1}{2}}_{J'-\frac{1}{2}}}\;Y^{J-\frac{1}{2}}_{J-\frac{1}{2}}\;g_{L'}g_L \end{cases}$$

$(b \to b)$

$(a \to a)$

$\overline{\mathcal{F}}\,\sigma_3\,\Phi = \overline{\mathcal{F}}_1\,\Phi_1 - \overline{\mathcal{F}}_2\,\Phi_2 + \overline{\mathcal{F}}_3\,\Phi_3 - \overline{\mathcal{F}}_4\,\Phi_4$ conduit au résultat opposé.

...

$a \to a$ ou $\quad J = L + \frac{1}{2} \longrightarrow J' = L' + \frac{1}{2}$

$$m_n^- = \sqrt{4\pi} \int Y_n^{-(n-1)} \overline{\Psi_{J'}^{J'}} \beta \sigma_- \Psi_J^J = 0$$

$$m_n^3 = \sqrt{4\pi} \int Y_n^{n} \overline{\Psi_{J'}^{J'}} \beta \tau_3 \Psi_J^J = -(-1)^n \left(Y_{J-\frac{1}{2}}^{J-\frac{1}{2}} Y_n^n, Y_{J-\frac{1}{2}}^{J-\frac{1}{2}} \right) \int g_{L'} g_L r^2 dr$$

$$= (-1)^{n+1} \sqrt{4\pi}\, \alpha\left(J'-\tfrac{1}{2}, n\right) \int g_{L'} g_L r^2 dr$$

$$\sqrt{4\pi}\, \alpha\left(J'-\tfrac{1}{2}, n\right) = \sqrt{\frac{(2J')!\,(2n+1)!}{(2J'+2n)!}} \frac{(J'-\frac{1}{2}+n)!}{(J'-\frac{1}{2})!\,n!} = \sqrt{\frac{(2L'+1)!\,(2n+1)!}{(2L+1)!}} \frac{L!}{L'!\,n!}$$

$$m_n'' = \mathcal{L}_n'' = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\, m_n^3 = (-1)^{n+1} \sqrt{n\, \frac{(2L'+1)!\,(2n)!}{(2L+1)!}} \cdot \frac{L!}{L'!\,n!} \qquad (3)$$

pour la partie angulaire.

$|\mathcal{L}_n''|^2$ donné par (3) est le facteur nucléaire du terme $^A|G_n''|^2$ avec l'interaction A et aussi du terme supplémentaire de $|G_{n+1}|^2$ avec l'interaction T (13 § 43).

Pour n = 0, $m_n'' = \mathcal{L}_n'' = 0$; la transition $L+\frac{1}{2} \to L+\frac{1}{2}$ ne correspond pas à un terme $|G_0''|^2$ mais à $|G_1|^2$ dont le facteur nucléaire est $\mathcal{L}_0^2 = |m_0^{(1)}|^2$ avec :

$$m_0^{(1)} = \sqrt{4\pi} \int \overline{\Psi_{J'}^{J-1}} \beta \sigma_- \Psi_J^J \quad (10\ \S\ 43) : \quad m_0^{(1)} \neq m_0$$

$$|m_0^{(1)}|^2 = \frac{2L+3}{2L+1}$$

valeur classique

$b \to b$ ou : $J = L - \frac{1}{2} \longrightarrow J' = L' - \frac{1}{2}$

$$m_n^- = (-1)^{n-1} \sqrt{8\pi} \sqrt{\frac{2J'+1}{(2J'+2)(2J+2)}} \left(Y_{J'+\frac{1}{2}}^{J'+\frac{1}{2}} Y_n^{n-1}, Y_{J+\frac{1}{2}}^{J-\frac{1}{2}} \right) \int g_{-L'-1} g_{-L-1}$$

$$= (-1)^{n-1} \sqrt{8\pi} \sqrt{\frac{2J'+1}{(2J'+2)(2J+2)}}\, \beta\left(n-1, J'+\tfrac{1}{2}\right) \int g_{-L'-1} g_{-L-1}$$

$$\sqrt{4\pi}\, \beta\left(n-1, J'+\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{(2n+1)\,(2n-1)!\,(2J'+2)!}{(2J'+2n)!\,(2J'+2n+2)}} \frac{(J'-\frac{1}{2}+n)!}{(n-1)!\,(J'+\frac{1}{2})!}$$

...

$$\sqrt{4\pi}\ \beta\left(n-1, J'+\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-1)!(2L'+1)!}{(2L-1)!(2L+1)}}\cdot\frac{(L-1)!}{(n-1)!\,L'!}$$

$$m_n^- = (-1)^{n-1}\sqrt{2\,\frac{2L'}{2L+1}\,\frac{1}{2n}\,\frac{(2n+1)!(2L')!}{(2L-1)!(2L+1)}}\ \frac{(L-1)!}{(n-1)!\,L'!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,m_n^- = (-1)^{n-1}\,\frac{1}{2L+1}\sqrt{2L'n\,\frac{(2L')!(2n)!}{(2L-1)!}}\cdot\frac{(L-1)!}{n!\,L'!}$$

$$= (-1)^{n-1}\,\frac{1}{2L+1}\sqrt{4\,\frac{L'}{L}\,n\,\frac{(2L')!(2n)!}{(2L)!}}\cdot\frac{L!}{n!\,L'!} \qquad (4)$$

$$m_n^J = (-1)^n\sqrt{\frac{(2J'+1)(2J+1)}{(2J'+2)(2J+2)}}\sqrt{4\pi}\left(Y_{J'+\frac{1}{2}}^{J'+\frac{1}{2}}\,Y_n^n,\ Y_{J+\frac{1}{2}}^{J+\frac{1}{2}}\right) - (-1)^n\sqrt{\frac{4\pi}{(2J'+2)(2J+2)}}\left(Y_{J'+\frac{1}{2}}^{J'-\frac{1}{2}}\,Y_n^n\,Y_{J+\frac{1}{2}}^{J-\right.$$

avec la même partie radiale que m_n^-

$$m_n^J = (-1)^n\sqrt{\frac{(2J'+1)(2J+1)}{(2J'+2)(2J+2)}}\sqrt{4\pi}\,\alpha\left(J'+\tfrac{1}{2}, n\right) - (-1)^n\,\frac{\sqrt{4\pi}\,\beta\left(J'-\frac{1}{2}, n\right)}{\sqrt{(2J'+2)(2J+2)}}$$

$$= \begin{cases} (-1)^n\sqrt{\dfrac{4LL'}{(2L'+1)(2L+1)}}\ \sqrt{\dfrac{(2L'+1)!(2n+1)!}{(2L+1)!}}\cdot\dfrac{L!}{n!\,L'!} \\ -(-1)^n\,\dfrac{1}{\sqrt{(2L'+1)(2L+1)}}\sqrt{\dfrac{(2L'+1)(2L'-1)!(2n+1)!}{(2L-1)!(2L+1)}}\cdot\dfrac{(L-1)!}{(L'-1)!\,n!} \end{cases}$$

$$= (-1)^n\sqrt{\frac{(2L')!(2n+1)!}{(2L+1)(2L+1)!}}\ \frac{L!}{n!\,L'!}\left[\sqrt{4LL'} - \sqrt{\frac{L'}{L}}\right]$$

$$= (-1)^n\ \frac{2L-1}{2L+1}\sqrt{\frac{L'}{L}}\ \frac{(2L')!(2n+1)!}{(2L)!}\cdot\frac{L!}{n!\,L'!}$$

$$\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\,m_n^J = (-1)^n\,\frac{2L-1}{2L+1}\sqrt{n\,\frac{L'}{L}\,\frac{(2L')!(2n)!}{(2L)!}}\cdot\frac{L'}{n!\,L'!} \qquad (5)$$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}''_n &= (-1)^n \frac{L!}{n!\,L'!}\sqrt{n\,\frac{L'}{L}\,\frac{(2L')!\,(2n)!}{(2L)!}} && (6)\\ m''_n &= (-1)^n \frac{L!}{n!\,L'!}\,\frac{2L-3}{2L+1}\sqrt{n\,\frac{L'}{L}\,\frac{(2L')!\,(2n)!}{(2L)!}} && (7)\end{aligned}}$$

3°- Calcul de $m'_n = i\int Y_{n-1}\,\beta\vec{\alpha}$

$\overline{\Psi}\beta\alpha\,\Phi = \sqrt{2}\left(\overline{\Psi}_2\Phi_3 - \overline{\Psi}_4\Phi_1\right)$ intervient seul dans ce cas où :

$\Delta J = \Delta L = n$ $\quad \overset{\uparrow}{\otimes} \rightleftarrows \overset{\uparrow}{\circ}$ - $a \to a$ ou $b \to b$

Nous prenons M = J $\longrightarrow$ M'=J'

$$\sqrt{2}\left(\overline{\Psi}_2\Phi_3 - \overline{\Psi}_4\Phi_1\right) = i\sqrt{2}\left(\frac{2J'+1}{2J'+2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y^{J'+\frac{1}{2}}_{J'+\frac{1}{2}}}\; Y^{J-\frac{1}{2}}_{J-\frac{1}{2}}\left(\underset{a\to a}{f_{L'}g_L} \text{ ou } \underset{b\to b}{f_{-L-1}\,g_{-L'-1}}\right)$$

$$m'_n = i\sqrt{4\pi}\int Y^{-(n-1)}_{n-1}\,\overline{\Psi^{J'}_{J'}}\,\beta\alpha\,\Psi^J_J$$

$$= -(-1)^{n-1}\sqrt{8\pi}\sqrt{\frac{2J'+1}{2J'+2}}\left(Y^{J'+\frac{1}{2}}_{J'+\frac{1}{2}}\,Y^{n-1}_{n-1},\,Y^{J-\frac{1}{2}}_{J-\frac{1}{2}}\right)\left[\int f_{L'}g_L \text{ ou } \int g_{-L'-1}f_{-L-1}\right]$$

$$= (-1)^n\sqrt{2\,\frac{2J'+1}{2J'+2}}\;\underbrace{\sqrt{\frac{(2J'+2)!\,(2n-1)!}{(2J'+2n)!}}\;\frac{(J'-\frac{1}{2}+n)!}{(J'+\frac{1}{2})!\,(n-1)!}}_{\sqrt{4\pi}\,\alpha(J'+\frac{1}{2},\,n-1)}\left[\quad\text{—}\quad\right]$$

$a \to a$: $\quad J = L+\frac{1}{2} \longrightarrow J' = L'+\frac{1}{2}$

$$m'_n = (-1)^n\sqrt{2(2L'+2)\,\frac{(2L'+2)!\,(2n-1)!}{(2L+1)!}}\cdot\frac{L!}{(n-1)!\,L'!}\int f_{L'}g_L$$

$$\equiv (-1)^n\sqrt{8\,\frac{(2L'+1)!\,(2n-1)!}{(2L+1)!}}\;\frac{L!}{(n-1)!\,L'!}\int f_{L'}g_L$$

$$m'_n = (-1)^n\sqrt{4n\,\frac{(2L'+1)\,(2n)!}{(2L+1)!}}\;\frac{L!}{n!\,L'!}\int f_{L'}g_L \qquad (9)$$

...

En comparant à (3) où le facteur radial est $\int g_{L'} g_L r^2 dr$ et prenant $\frac{f_{L'}}{g_{L'}} = \frac{1}{2}\frac{v'}{c}$:

$$\frac{m'}{m''_n} = -\frac{v'}{c} \quad (10) \qquad \left(J = L + \tfrac{1}{2} \longrightarrow J' = L' + \tfrac{1}{2}\right)$$

$b \to b \qquad J = L - \frac{1}{2} \longrightarrow J' = L' - \frac{1}{2}$

$$m'_n = (-1)^n \sqrt{4L' \frac{(2L')!(2n-1)!}{(2L-1)!} \cdot \frac{(L-1)!}{(n-1)!\,L'!}} \int g_{-L'-1} f_{-L-1}$$

$$= (-1)^n \sqrt{8 \frac{L'}{L} \frac{(2L')!(2n-1)!}{(2L)!} \cdot \frac{L!}{(n-1)!\,L'!}} \int g_{-L'-1} f_{-L-1}$$

$$m'_n = (-1)^n \sqrt{4n \frac{L'}{L} \frac{(2L')!(2n)!}{(2L)!} \frac{L!}{n!\,L'!}} \int g_{-L'-1} f_{-L-1} \quad (11)$$

En comparant à (7) où le facteur radial est $\int g_{-L'-1} g_{-L-1}$

$$\frac{m'_n}{m''_n} = \frac{v}{c} \frac{2L-3}{2L+1} \quad (12) \qquad \left(J = L - \tfrac{1}{2} \longrightarrow J' = L' - \tfrac{1}{2}\right)$$

REMARQUES :

1°- On voit que m'_n est réel comme m''_n : $m'_n = i \int Y_{n-1} \beta \vec{\alpha}$ où $\int Y_{n-1} \beta \vec{\alpha}$ est purement imaginaire. Le facteur i provenait du facteur leptonique $\overline{\varphi} \beta \vec{\alpha} \varphi$ lui aussi purement imaginaire. Au contraire, $\overline{\varphi} \beta \vec{\sigma} \varphi$ et $\int Y_n \beta \vec{\sigma}$ sont tous deux réels.

Ces caractères peuvent se rattacher aux propriétés de symétrie des opérateurs quand on change le signe de la variable temps, comme l'a montré Wigner [22].
En Mécanique ondulatoire non Relativiste, la fonction d'onde Ψ d'un état stationnaire ne dépend de la variable t que par le facteur $e^{-\frac{i}{\hbar} Et}$ et vérifie l'équation

$$H\Psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (13)$$

où H est réel.

...

En posant $\psi = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\, a$ (14), a vérifie $Hu = Ea$ et peut être pris réel(+); l'opération de conjugaison revient alors au changement de t en -t, comme on le voit sur (14) ou directement sur (13). Si un opérateur O est tel que O (-t) = O(t) les élements de matrice correspondants sont réels

O (-t) = - O(t) " " " st purement imaginaires.

En mécanique Relativiste de Dirac H n'est plus réel puisqu'il contient $\vec{\alpha}$ complexe, mais Wigner a pu démontrer la même propriété.

On doit alors considérer $\vec{\sigma}, \beta\vec{\sigma}, 1, \beta$ comme des opérateurs tels que : O (-t)= O (t) (vecteurs du genre espace ou invariants dans l'espace ordinaire du type $\beta\vec{\sigma}.\vec{\sigma}$).
$\vec{\alpha}, \beta\vec{\alpha}, \gamma_5$ comme tels que O (-t) = - O (t) (vecteurs vitesses du genre temps ou invariant $\vec{\alpha}.\vec{\sigma}$).

Critchfield [I7] a fait une application erronée de ce théorème : il a pris m'_n ou $\int\gamma_5$ purement imaginaire, omettant le facteur leptonique de même nature. Cela lui permettait d'écrire : $|m'_n + m''_n(\ )|^2 = |m'_n|^2 + (m''_n)^2(\cdot)^2$ sans terme croisé, ce qui est inexact.

2°- Notre calcul montre également que $\int Y_{n-1}\beta\vec{\alpha}$ et $\int Y_{n-1}\vec{\alpha}$ sont du même ordre v par rapport à $\int Y_n \beta\vec{\sigma}$ contrairement à un calcul de Critchfield repris par Mr Weisskopf. En effet, $\overline{\mathcal{F}}\alpha_- \Phi = \sqrt{2}\,(\overline{\mathcal{F}_2}\Phi_3 + \overline{\mathcal{F}_4}\Phi_1)$ peut être calculé comme précédemment pour $\Delta J = \Delta L = n$ et il vient :

$$\overline{\mathcal{F}}\alpha_- \Phi = i\sqrt{2}\left(\frac{2J+1}{2J+2}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{Y^{J+\frac{1}{2}}_{J+\frac{1}{2}}}\; Y^{J-\frac{1}{2}}_{J-\frac{1}{2}} \left(f_{\substack{l'\\ a\to a}} g_l \text{ ou } -f_{\substack{l-1\\ b\to b}} g_{l'-1}\right)$$

même résultat, que pour $\beta\alpha_-$ (au signe près pour $b \to b$).

...

(+) On peut prendre des Y^m_ℓ réels en $\begin{cases}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{cases}$

Le fait que $\int \beta \vec{\alpha}$ soit d'ordre v et non v^2/c^2 résulte également du caractère de $\overline{\Psi} \beta \vec{\sigma} \Psi$ densité de moment magnétique, et de $\overline{\Psi} \beta \vec{\alpha} \Psi$ densité de moment électrique, l'ensemble formant un tenseur d'espace-temps antisymétrique.

Pour une particule libre associée à une onde plane, on peut montrer que : $\int \beta \vec{\alpha} = \frac{\vec{v}}{c} \wedge \int \beta \vec{\sigma}$ (23 p;190)(++)

(++) Après notre rédaction, Mr Weisskopf s'est trouvé d'accord avec ces résultats.

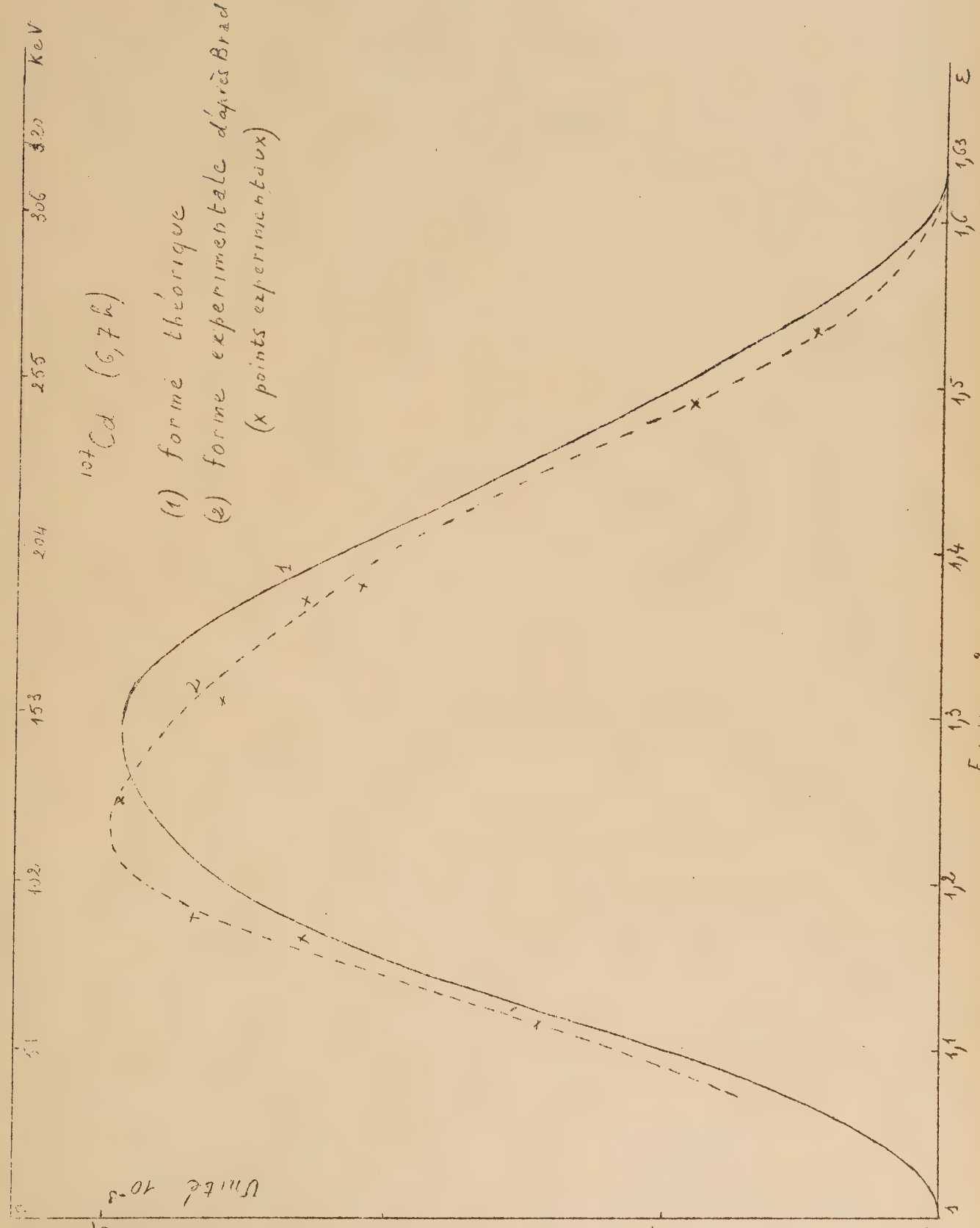

keV
306
255
204
153
102
51
^{107}Cd (6,7 h)
(1) forme théorique
(2) forme expérimentale d'après Bradt
(x points expérimentaux)
Unité 10^{-2}
15
10
5
0
1
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
1,6
1,63
ε
1
2

Figure 2

^{10}Be $(2,7 \times 10^6$ a.)

(1) spectre théorique effectif ($\Delta J = 3$, non)

(2) " permis fictif de même E_0

o points d'après Fullbright et Milton

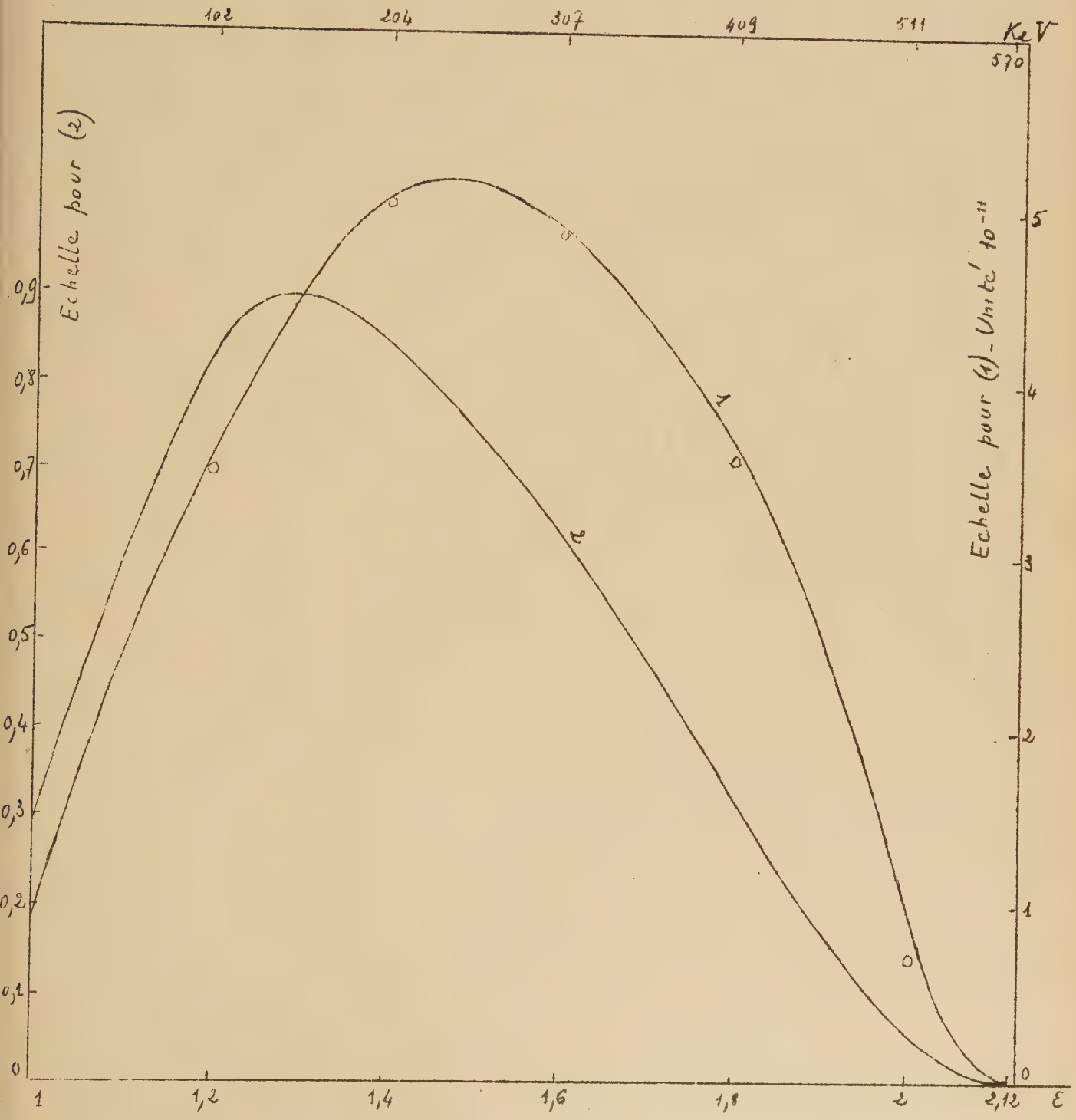


Figure 4

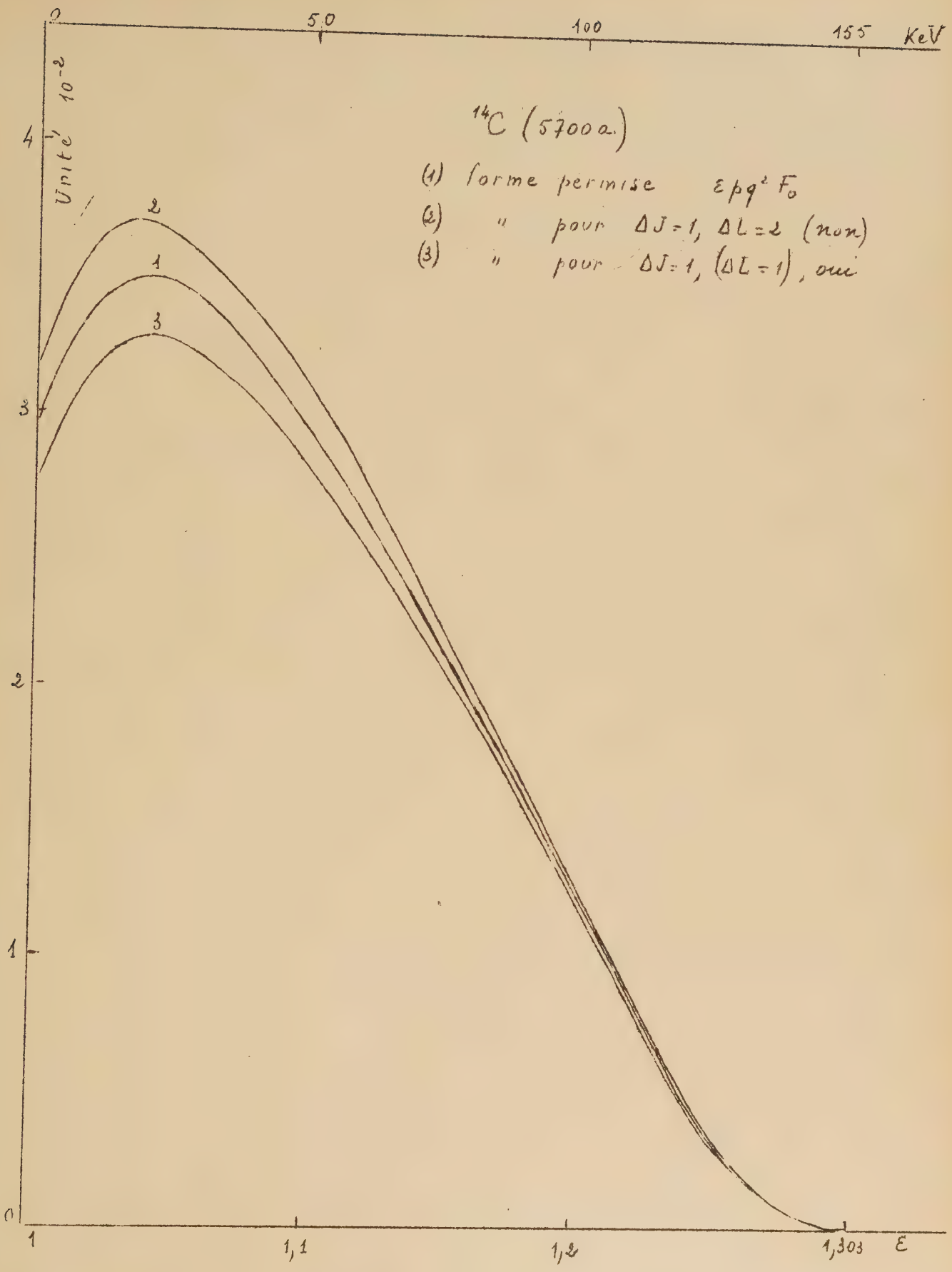

0
50
100
155 KeV
Unité 10⁻²
4
3
2
1
0
^{14}C (5700 a.)
(1) forme permise $\varepsilon p q^2 F_0$
(2) " pour $\Delta J = 1$, $\Delta L = 2$ (non)
(3) " pour $\Delta J = 1$, $(\Delta L = 1)$, oui
1
1,1
1,2
1,303
E

Figure 5

B I B L I O G R A P H I E .

[I] - FERMI E. Zeits. f. Phys. 88, I6I (1934)

[2] - BETHE H.A.Handbuch der Physik, Band. 24-I- Berlin I933(p.30I-324)

[3] - ROSE M.E. Phys. Rev. 5I, 484 (1937)

[4] - HILL E.L. et LANDSHOFF/R - Rev. Mod. Phys. IO, 87 (1938)

[5] - BOUCHEZ R.,de GROOT S.R., NATAF et TOLHOEK H.A. J. Phys. et Ra.T II I05 - Mars I950.

[6] - ROSENFELD L. Nuclear Forces- North Holland Publishing co-1948.

[7] - PERRIN F. Comptes rendus- I97, I933, p.I625 et Cours au Collège de France.

[8] - BORN M. et JORDAN P.- Elementare Quantenmechanik- Berlin(Springer 1930).

[9] - BAUER E. Ann. Inst. H. Poincaré, 4, 1, 1933.

[10] - BOUCHEZ R. et NATAF R., Sur les noyaux de nombre de masse IO J. Phys. et Ra.11-266 (Juin I950).

[11] - FEENBERG E. Phys. Rev. 77, 77I, I950 et articles précédents.

[12] - BETHE et BACHER - Rev. Mod. Phys. 8, I7I, I950.

[13] - NORDHEIM L.W.- Phys. Rev. 75, I894 (I949).

[14] - GOEPPERT MAYER M.- Phys. Rev. 78,I6,I950 et articles précédents.

[15] - KONOPINSKI E.J.- Rev. Mod. Phys. I5, 209, I943.

[16] - de GROOT SR, et TOLHOEK H.A.- C.R. Acad. 230, 15I0, I950. et Physica.

[17] - CRITCHFIELD C.L.- Phys. ReV. 63, 4I7(I943).

[18] - GREULING E.- Phys. Rev. 6I, 568, I942.

[19] - NATAF R. - Comptes-rendus 230, I950 p.532 et p.737.

[20] - BOUCHEZ R. - " " 230, I950 p. 440 et Thèse.

[2I] - MARSHAK R.E.- Phys. Rev. 6I, 43I (1942).

[22] - WIGNER E. - Göttingen Nachichten I932-p. 546.

[23] - de BROGLIE - L'Electron magnétique-(Hermann édit.(I934).

[24] - MARSHAK R.E.- Phys. Rev. 75-5I3 (I949) (L.).

[25] - BRADT, SCHERRER et al.- Helv. Phys.Acta-30-IV(I945)etP.R.68-57(I945

[26] - JAHNKE et EMDE; M. BOLL.

[27] - FEISTER I.-P.R.78-375 (I950).

[28] - GORDON W. RING H. et BURG A.B. P.R.74,II9I (I948).

[29] - FULBRIGHT H.W. et MILTON J.C.D.- Phys.Rev.76,I27I,A.(I949).

[30] - FEDDMAN et WU- Phys. Rev. 95,I286 (I949).

...

(suite de la B I B L I O G R A P H I E)

[31] - JENKINS - Phys. Rev. 80,III (I950).

[32] - WARSHAW S.D. - Phys. Rev. 80,III (I950).

33 - WARSHAW S.D. - JOSES J.L.- CHEN and APPLETON G.L. -Phys. Rev. 80,288 (I950).

[34] - W U C.S. TOWNES C.H., FELDMAN L. - Phys. Rev. 76, 692 (I949) (L.).

[35] - WU C.S., FELDMAN L. " " 693 "

[36] - TOWNES C.H., AAMODT L.C. " " 69I "

[37] - LONGMIRE C., WU C.S., TOWNES C.H. " " 695 "

[38] - FIERZ M. - Zeits. f. Phys. I04-533 (I937).

39 - SLATER J.C. Phys.Rev. 36-57(I930)

D E U X I E M E T H E S E

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

PASSAGE DANS LA MATIERE DES PARTICULES LOURDES CHARGEES

Vu et Approuvé :
Paris, le 8 Février 1951
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
signé : A. CHATELET.

Vu et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
signé : Jean SARRAILH.